

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ANALYSE DE SENSIBILITÉS D'ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES  
SUBSONIQUES

PIERRE EDMOND  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
DÉCEMBRE 2004



Library and  
Archives Canada

Bibliothèque et  
Archives Canada

Published Heritage  
Branch

Direction du  
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file    Votre référence*

*ISBN: 0-494-01316-8*

*Our file    Notre référence*

*ISBN: 0-494-01316-8*

#### NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

#### AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

---

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

ANALYSE DE SENSIBILITÉS D'ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES  
SUBSONIQUES

présenté par: EDMOND Pierre

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. REGGIO Marcelo, Ph.D., président

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. ILINCA Florin, Ph.D., membre

“Qui triomphe de lui-même possède la force.” (Lao-Tseu)

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, Dominique Pelletier, pour la qualité de son encadrement, son soutien, son aide inestimable, ses nombreux conseils et sa grande disponibilité.

Je tiens également à remercier Marcelo Reggio, président du jury, et Florin Ilinca, membre du jury, pour le temps et l'attention qu'ils me consacrent.

Je voudrais également remercier Stéphane Étienne pour son aide en général précieuse, les virées dans sa Honda à télécommande et son oreille musicale. Je suis également reconnaissant à Dominique Tremblay pour sa bonne humeur, malgré les nombreuses réunions à Polyphoto et les longues soirées à rédiger des demandes de bourses, et aussi pour sa patience face aux plaisanteries. J'adresse aussi mes remerciements à tous les amis que j'ai et que je me suis fait ici, même à ceux dont j'aurais pu oublier le prénom...

## RÉSUMÉ

Ce mémoire de maîtrise présente une formulation générale de la méthode des sensibilités continues appliquée à des écoulements compressibles subsoniques. Les sensibilités traduisent l'effet d'un paramètre de design sur l'écoulement. On les obtient en différentiant les équations continues de Navier-Stokes puis en discrétisant le résultat obtenu pour une résolution numérique. Nous traitons ici les calculs bidimensionnels effectués en coordonnées cartésiennes et axisymétriques.

Nous utilisons dans notre résolution numérique une méthode d'éléments finis adaptative. On la présente en précisant la formulation variationnelle employée et la manière dont le code est structuré. On vérifie ensuite la bonne implémentation du code à l'aide de solutions analytiques suffisamment complexes : c'est la méthode des solutions manufacturées. Nous considérons tout d'abord un exemple de couche limite bidimensionnelle en cartésien, puis un jet impactant sur une plaque plane en axisymétrique. Dans les deux cas, nous effectuons une analyse de convergence afin de tester la qualité de la solution, la bonne adaptation du maillage et la précision de l'estimateur d'erreur qui est utilisé dans le raffinement du maillage, tout ceci aussi bien pour l'écoulement que pour les sensibilités.

Une fois cette étape effectuée, on utilise le code en toute confiance dans l'étude d'un écoulement subsonique autour d'un profil NACA0012. Les paramètres considérés sont l'angle d'attaque, le nombre de Mach de référence et le nombre de Reynolds. On effectue des analyses de sensibilités et des calculs de solutions voisines pour de faibles variations de l'angle d'attaque et du nombre de Mach.

Enfin, on s'intéresse à un jet axisymétrique impactant sur un mur. Les paramètres d'étude sont des exposants apparaissant dans l'expression des propriétés physiques variables du fluide, et le nombre de Mach de référence. On effectue des analyses de sensibilités, on identifie les paramètres dominants et on fait également une analyse d'incertitude. Enfin, on calcule les solutions d'écoulements voisins pour des valeurs

des exposants proches de celles de départ et pour des nombres de Mach voisins de celui de la solution d'origine.

## ABSTRACT

This thesis presents a general formulation of the continuous sensitivity equation method for subsonic compressible flows. Sensitivities characterize the effect of a design parameter on the flow. They are obtained by differentiation of the continuous Navier-Stokes equations followed by discretization of the result for a numerical resolution. Two-dimensional calculations are done in cartesian and axisymmetric coordinates.

An adaptive finite element method is used for the numerical solution. We present the weak form used and the structure of the CFD code. The implementation is verified on analytic solutions of sufficient complexity using the method of manufactured solutions. First we consider a two-dimensional boundary layer in cartesian coordinates and then a jet impinging on a flat plate in axisymmetric coordinates. In both case, a grid convergence study is performed to test the quality of the solution, the good adaptation of the mesh and the accuracy of the error estimator used for the mesh refinement. All this is done for the flow as well for the sensitivities.

The code is then applied to the study of subsonic flow over an NACA0012 airfoil. The parameters of interest are the angle of attack, the reference Mach number and the Reynolds number. We perform sensitivity analyses and nearby flows computations for small variations of the angle of attack and of the Mach number.

We then study a round jet impinging on a wall. The parameters of interest are exponents present in the expression of the variable physical properties, and the reference Mach number. Sensitivity analyses, identification of key parameters and uncertainty analysis are performed. We finally use the sensitivities for fast estimation of nearby flows, with the values of the parameters close to those of the original solution.



## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iv
REMERCIEMENTS . . . . .	v
RÉSUMÉ . . . . .	vi
ABSTRACT . . . . .	viii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES . . . . .	xx
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xxv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xxvi
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 1 ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES	6
1.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	6
1.2 Forme adimensionnelle . . . . .	9
1.2.1 Adimensionnalisation de la pression . . . . .	11
1.2.2 Adimensionnalisation de la température . . . . .	13
1.3 Unification des écritures . . . . .	14
1.3.1 Écoulement compressible, écriture dimensionnelle . . . . .	15
1.3.2 Écoulement incompressible, écriture dimensionnelle . . . . .	15
1.3.3 Écoulement compressible, écriture adimensionnelle . . . . .	16
1.3.4 Écoulement incompressible, écriture adimensionnelle . . . . .	16

1.3.5	Écriture unique . . . . .	17
CHAPITRE 2 MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS . . .		20
2.1	Les sensibilités . . . . .	20
2.1.1	Définition . . . . .	20
2.1.2	Utilité des sensibilités . . . . .	22
2.1.2.1	Design optimal . . . . .	22
2.1.2.2	Calcul rapide de solutions voisines . . . . .	22
2.1.2.3	Analyse de sensibilités . . . . .	23
2.1.2.4	Identification des paramètres dominants . . . . .	24
2.1.2.5	Analyse d'incertitude . . . . .	24
2.1.3	Calcul des sensibilités . . . . .	25
2.2	Les équations des sensibilités . . . . .	26
2.2.1	Équation de continuité . . . . .	27
2.2.2	Équation de mouvement . . . . .	28
2.2.3	Équation d'énergie . . . . .	28
2.2.4	Équation d'état . . . . .	29
2.3	Conditions aux limites . . . . .	29
2.3.1	Conditions de Dirichlet . . . . .	29
2.3.2	Conditions de Neumann . . . . .	32
CHAPITRE 3 RÉOLUTION DES ÉQUATIONS . . . . .		34
3.1	Méthode des éléments finis . . . . .	34
3.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	34
3.1.2	Discrétisation . . . . .	36
3.1.3	Résolution . . . . .	38
3.2	Traitement des sensibilités . . . . .	39
3.3	Estimation d'erreur . . . . .	40
3.4	Adaptation . . . . .	42

CHAPITRE 4	VÉRIFICATION . . . . .	45
4.1	Méthode des solutions manufacturées . . . . .	45
4.2	Couche limite bidimensionnelle compressible . . . . .	46
4.2.1	Description du problème . . . . .	46
4.2.2	Étude de la convergence de la solution . . . . .	49
4.2.2.1	Écoulement . . . . .	50
4.2.2.2	Sensibilités . . . . .	52
4.3	Jet axisymétrique impactant sur une plaque plane . . . . .	52
4.3.1	Description du problème . . . . .	53
4.3.2	Étude de la convergence de la solution . . . . .	57
4.3.2.1	Écoulement . . . . .	58
4.3.2.2	Sensibilités . . . . .	59
4.4	Conclusion . . . . .	61
CHAPITRE 5	APPLICATION AU NACA0012 . . . . .	63
5.1	Description du problème . . . . .	63
5.2	Validation . . . . .	65
5.3	Analyse de sensibilités . . . . .	70
5.3.1	Écoulement . . . . .	70
5.3.2	Sensibilités par rapport à $\alpha$ . . . . .	71
5.3.3	Sensibilités par rapport à $M_r$ . . . . .	75
5.3.4	Sensibilités par rapport à $Re$ . . . . .	76
5.4	Calculs de solutions voisines . . . . .	79
5.4.1	Solutions voisines pour $\alpha$ proche de 3 degrés . . . . .	79
5.4.2	Solutions voisines pour $M_r$ proche de 0.4 . . . . .	85
5.4.3	Solutions voisines pour des valeurs de $\alpha$ proches de 3 degrés et des valeurs de $M_r$ proches de 0.4 . . . . .	89
5.5	Conclusion . . . . .	98

CHAPITRE 6	APPLICATION À UN JET AXISYMETRIQUE . . . . .	101
6.1	Description du problème . . . . .	101
6.2	Étude de Convergence . . . . .	104
6.3	Comparaison tube long - tube court . . . . .	108
6.4	Comparaison mur chaud - mur froid . . . . .	112
6.5	Comparaison air - CO <sub>2</sub> . . . . .	114
6.6	Sensibilités . . . . .	115
6.6.1	Sensibilités par rapport à $A_{c_p}$ . . . . .	117
6.6.2	Sensibilités par rapport à $A_\mu$ . . . . .	122
6.6.3	Sensibilités par rapport à $A_\lambda$ . . . . .	128
6.6.4	Conclusion . . . . .	134
6.7	Sensibilités normalisées . . . . .	135
6.8	Analyse d'incertitude . . . . .	142
6.8.1	Jet d'air froid impactant sur un mur chaud . . . . .	142
6.8.2	Jet de CO <sub>2</sub> froid impactant sur un mur chaud . . . . .	145
6.8.3	Analyse d'incertitude sur $A_{c_p}$ , $A_\mu$ et $A_\lambda$ simultanément . . .	148
6.9	Calculs de solutions voisines . . . . .	151
6.9.1	Paramètres $A_{c_p}$ , $A_\mu$ et $A_\lambda$ . . . . .	153
6.9.2	Paramètre $M_r$ . . . . .	155
CONCLUSION	. . . . .	164
RÉFÉRENCES	. . . . .	166
ANNEXES	. . . . .	171

## LISTE DES FIGURES

FIG. 2.1	Matériau composite . . . . .	21
FIG. 2.2	Calcul de l'incertitude . . . . .	25
FIG. 2.3	Conditions aux limites pour un paramètre de forme . . . . .	30
FIG. 2.4	Géométrie du tuyau débouchant sur un réservoir . . . . .	31
FIG. 3.1	Élément de Taylor-Hood . . . . .	37
FIG. 4.1	Géométrie et conditions aux limites . . . . .	48
FIG. 4.2	Maillage final pour la couche limite . . . . .	49
FIG. 4.3	Courbe de convergence pour l'écoulement . . . . .	50
FIG. 4.4	Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à $M_r$ . . . . .	53
FIG. 4.5	Géométrie du jet axisymétrique . . . . .	54
FIG. 4.6	Maillage final pour le jet impactant . . . . .	58
FIG. 4.7	Courbe de convergence pour l'écoulement . . . . .	59
FIG. 4.8	Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à $A_u$ . . . . .	60
FIG. 4.9	Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à $A_p$ . . . . .	61
FIG. 4.10	Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à $A_T$ . . . . .	62
FIG. 5.1	Convergence du $C_p$ au cours des cycles, $M_r = 0.703$ , $\alpha = -0.08$ . . . . .	66
FIG. 5.2	Convergence du $C_p$ au cours des cycles, $M_r = 0.6$ , $\alpha = 3.35$ . . . . .	67
FIG. 5.3	Distribution du $C_p$ pour $\alpha = -0.08$ , $M_r = 0.703$ , $Re = 3.79 \times 10^6$ . . . . .	67
FIG. 5.4	Distribution du $C_p$ pour $\alpha = 3.35$ , $M_r = 0.6$ , $Re = 4.65 \times 10^6$ . . . . .	68
FIG. 5.5	Comparaison du $C_p$ à l'aide de résultats incompressibles . . . . .	69
FIG. 5.6	Comparaison du $C_p$ à l'aide de résultats incompressibles (agrandissement) . . . . .	69
FIG. 5.7	Maillage final pour $\alpha = 3$ , $M_r = 0.4$ et $Re = 2000$ . . . . .	71
FIG. 5.8	Distribution de $u$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . . . .	72
FIG. 5.9	Distribution de $p$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . . . .	72
FIG. 5.10	Distribution de $s_u^\alpha$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . . . .	73

FIG. 5.11	Distribution de $s_p^\alpha$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . . .	74
FIG. 5.12	Distribution de $s_u^{M_r}$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . .	75
FIG. 5.13	Distribution de $s_p^{M_r}$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . .	76
FIG. 5.14	Distribution de $s_u^{Re}$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . . .	77
FIG. 5.15	Distribution de $s_p^{Re}$ pour $M_r = 0.4$ , $\alpha = 3$ , $Re = 2000$ . . . .	78
FIG. 5.16	Solution extrapolée à $\alpha = 2$ à partir de $\alpha = 3$ . . . . .	80
FIG. 5.17	Solution extrapolée à $\alpha = 4$ à partir de $\alpha = 3$ . . . . .	81
FIG. 5.18	Solution extrapolée à $\alpha = 1$ à partir de $\alpha = 3$ . . . . .	81
FIG. 5.19	Solution extrapolée à $\alpha = 5$ à partir de $\alpha = 3$ . . . . .	82
FIG. 5.20	Solution extrapolée à $\alpha = 0$ à partir de $\alpha = 3$ . . . . .	82
FIG. 5.21	Solution extrapolée à $\alpha = 6$ à partir de $\alpha = 3$ . . . . .	83
FIG. 5.22	Coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque . . .	84
FIG. 5.23	Solution extrapolée à $M_r = 0.3$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . .	86
FIG. 5.24	Solution extrapolée à $M_r = 0.5$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . .	86
FIG. 5.25	Solution extrapolée à $M_r = 0.2$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . .	87
FIG. 5.26	Solution extrapolée à $M_r = 0.6$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . .	87
FIG. 5.27	Solution extrapolée à $M_r = 0.1$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . .	88
FIG. 5.28	Solution extrapolée à $M_r = 0.7$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . .	88
FIG. 5.29	Solution extrapolée à $M_r = 0$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . .	89
FIG. 5.30	Coefficient de pression selon la formule de Prandtl-Gauert .	89
FIG. 5.31	Récapitulatif des cas déjà étudiés . . . . .	90
FIG. 5.32	Solution extrapolée à $(\alpha = 1, M_r = 0.2)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	91
FIG. 5.33	Solution extrapolée à $(\alpha = 1, M_r = 0.6)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	92
FIG. 5.34	Solution extrapolée à $(\alpha = 5, M_r = 0.2)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	92

FIG. 5.35	Solution extrapolée à $(\alpha = 5, M_r = 0.6)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	93
FIG. 5.36	Solution extrapolée à $(\alpha = 1, M_r = 0.3)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	94
FIG. 5.37	Solution extrapolée à $(\alpha = 1, M_r = 0.5)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	94
FIG. 5.38	Solution extrapolée à $(\alpha = 5, M_r = 0.3)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	95
FIG. 5.39	Solution extrapolée à $(\alpha = 5, M_r = 0.5)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	95
FIG. 5.40	Solution extrapolée à $(\alpha = 2, M_r = 0.2)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	96
FIG. 5.41	Solution extrapolée à $(\alpha = 2, M_r = 0.6)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	96
FIG. 5.42	Solution extrapolée à $(\alpha = 4, M_r = 0.2)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	97
FIG. 5.43	Solution extrapolée à $(\alpha = 4, M_r = 0.6)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	97
FIG. 5.44	Solution extrapolée à $(\alpha = 2, M_r = 0.3)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	98
FIG. 5.45	Solution extrapolée à $(\alpha = 2, M_r = 0.5)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	99
FIG. 5.46	Solution extrapolée à $(\alpha = 4, M_r = 0.3)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	99
FIG. 5.47	Solution extrapolée à $(\alpha = 4, M_r = 0.5)$ à partir de $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$ . . . . .	100
FIG. 6.1	Géométrie du jet impactant . . . . .	102
FIG. 6.2	Maillage final . . . . .	105

FIG. 6.3	Maillage final (agrandissement) . . . . .	106
FIG. 6.4	Contours des variables d'écoulement (mur chaud) . . . . .	107
FIG. 6.5	Convergence du nombre de Nusselt au cours des cycles (mur chaud) . . . . .	108
FIG. 6.6	Convergence du coefficient de friction au cours des cycles (mur chaud) . . . . .	109
FIG. 6.7	Comparaison du nombre de Nusselt pour un tube long et un tube court . . . . .	110
FIG. 6.8	Comparaison du coefficient de friction pour un tube long et un tube court . . . . .	110
FIG. 6.9	Distribution de $u$ le long du tube aux positions $x = 0$ , $x = -3$ et $x = -6$ . . . . .	111
FIG. 6.10	Contours des variables d'écoulement (mur froid) . . . . .	113
FIG. 6.11	Comparaison du nombre de Nusselt pour le mur froid et le mur chaud . . . . .	114
FIG. 6.12	Comparaison du coefficient de friction pour le mur froid et le mur chaud . . . . .	114
FIG. 6.13	Comparaison du nombre de Nusselt pour le mur froid et le mur chaud ( $\text{CO}_2$ ) . . . . .	115
FIG. 6.14	Comparaison du coefficient de friction pour le mur froid et le mur chaud ( $\text{CO}_2$ ) . . . . .	116
FIG. 6.15	Dépendance des propriétés vis-à-vis de la température . . .	116
FIG. 6.16	Effet d'une variation de $A_{c_p}$ sur $c_p$ (air) . . . . .	118
FIG. 6.17	Effet d'une variation de $A_{c_p}$ sur $c_p$ ( $\text{CO}_2$ ) . . . . .	118
FIG. 6.18	Isovaleurs (négatives) de $s_T^{A_{c_p}}$ . . . . .	119
FIG. 6.19	Isovaleurs de $s_u^{A_{c_p}}$ . . . . .	120
FIG. 6.20	Isovaleurs de $s_v^{A_{c_p}}$ . . . . .	121
FIG. 6.21	Isovaleurs (négatives) de $s_p^{A_{c_p}}$ . . . . .	122



FIG. 6.22	Valeur de $s_p^{A_{cp}}$ le long de l'axe de symétrie . . . . .	123
FIG. 6.23	Effet d'une variation de $A_\mu$ sur $\mu$ (air) . . . . .	123
FIG. 6.24	Effet d'une variation de $A_\mu$ sur $\mu$ ( $\text{CO}_2$ ) . . . . .	124
FIG. 6.25	Isovaleurs (positives) de $s_T^{A_\mu}$ . . . . .	125
FIG. 6.26	Isovaleurs de $s_u^{A_\mu}$ . . . . .	126
FIG. 6.27	Isovaleurs de $s_v^{A_\mu}$ . . . . .	127
FIG. 6.28	Isovaleurs (positives) de $s_p^{A_\mu}$ . . . . .	128
FIG. 6.29	Valeur de $s_p^{A_\mu}$ le long de l'axe de symétrie . . . . .	129
FIG. 6.30	Effet d'une variation de $A_\lambda$ sur $\lambda$ (air) . . . . .	130
FIG. 6.31	Effet d'une variation de $A_\lambda$ sur $\lambda$ ( $\text{CO}_2$ ) . . . . .	130
FIG. 6.32	Isovaleurs (positives) de $s_T^{A_\lambda}$ . . . . .	131
FIG. 6.33	Isovaleurs de $s_u^{A_\lambda}$ . . . . .	132
FIG. 6.34	Isovaleurs de $s_v^{A_\lambda}$ . . . . .	133
FIG. 6.35	Isovaleurs (positives) de $s_p^{A_\lambda}$ . . . . .	134
FIG. 6.36	Valeur de $s_p^{A_\lambda}$ le long de l'axe de symétrie . . . . .	135
FIG. 6.37	Sensibilité normalisée de $Nu$ pour un jet d'air froid sur mur chaud . . . . .	136
FIG. 6.38	Sensibilité normalisée de $Nu$ pour un jet d'air chaud sur mur froid . . . . .	137
FIG. 6.39	Sensibilité normalisée de $Nu$ pour un jet de $\text{CO}_2$ froid sur mur chaud . . . . .	137
FIG. 6.40	Sensibilité normalisée de $Nu$ pour un jet de $\text{CO}_2$ chaud sur mur froid . . . . .	138
FIG. 6.41	Sensibilité normalisée de $C_f$ pour un jet d'air froid sur mur chaud . . . . .	139
FIG. 6.42	Sensibilité normalisée de $C_f$ pour un jet d'air chaud sur mur froid . . . . .	140

FIG. 6.43	Sensibilité normalisée de $C_f$ pour un jet de $\text{CO}_2$ froid sur mur chaud . . . . .	140
FIG. 6.44	Sensibilité normalisée de $C_f$ pour un jet de $\text{CO}_2$ chaud sur mur froid . . . . .	141
FIG. 6.45	Incertitude sur $Nu$ (air, paramètre $A_{c_p}$ ) . . . . .	143
FIG. 6.46	Incertitude sur $Nu$ (air, paramètre $A_\mu$ ) . . . . .	143
FIG. 6.47	Incertitude sur $Nu$ (air, paramètre $A_\lambda$ ) . . . . .	144
FIG. 6.48	Incertitude sur $C_f$ (air, paramètre $A_{c_p}$ ) . . . . .	145
FIG. 6.49	Incertitude sur $C_f$ (air, paramètre $A_\mu$ ) . . . . .	145
FIG. 6.50	Incertitude sur $C_f$ (air, paramètre $A_\lambda$ ) . . . . .	146
FIG. 6.51	Incertitude sur $Nu$ ( $\text{CO}_2$ , paramètre $A_{c_p}$ ) . . . . .	147
FIG. 6.52	Incertitude sur $Nu$ ( $\text{CO}_2$ , paramètre $A_\mu$ ) . . . . .	147
FIG. 6.53	Incertitude sur $Nu$ ( $\text{CO}_2$ , paramètre $A_\lambda$ ) . . . . .	148
FIG. 6.54	Incertitude sur $C_f$ ( $\text{CO}_2$ , paramètre $A_{c_p}$ ) . . . . .	148
FIG. 6.55	Incertitude sur $C_f$ ( $\text{CO}_2$ , paramètre $A_\mu$ ) . . . . .	149
FIG. 6.56	Incertitude sur $C_f$ ( $\text{CO}_2$ , paramètre $A_\lambda$ ) . . . . .	149
FIG. 6.57	Incertitude sur $Nu$ . . . . .	151
FIG. 6.58	Incertitude sur $C_f$ . . . . .	151
FIG. 6.59	Incertitude sur $Nu$ ( $\text{CO}_2$ ) . . . . .	152
FIG. 6.60	Incertitude sur $C_f$ ( $\text{CO}_2$ ) . . . . .	152
FIG. 6.61	$Nu$ extrapolé à ( $A_{c_p} = 0.055$ , $A_\mu = 0.748$ , $A_\lambda = 0.836$ ) à partir de ( $A_{c_p} = 0.05$ , $A_\mu = 0.68$ , $A_\lambda = 0.76$ ) . . . . .	154
FIG. 6.62	$C_f$ extrapolé à ( $A_{c_p} = 0.055$ , $A_\mu = 0.748$ , $A_\lambda = 0.836$ ) à partir de ( $A_{c_p} = 0.05$ , $A_\mu = 0.68$ , $A_\lambda = 0.76$ ) . . . . .	154
FIG. 6.63	$Nu$ extrapolé à $M_r = 0.45$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . . .	156
FIG. 6.64	$C_f$ extrapolé à $M_r = 0.45$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . . .	156
FIG. 6.65	Distribution de Mach extrapolée à $M_r = 0.45$ à partir de $M_r = 0.4$ . . . . .	157

FIG. 6.66	$Nu$ extrapolé à $M_r = 0.55$ à partir de $M_r = 0.5$ . . . . .	158
FIG. 6.67	$C_f$ extrapolé à $M_r = 0.55$ à partir de $M_r = 0.5$ . . . . .	159
FIG. 6.68	Distribution de Mach extrapolée à $M_r = 0.55$ à partir de $M_r = 0.5$ . . . . .	159
FIG. 6.69	Distribution de Mach extrapolée à $M_r = 0.5$ à partir de $M_r = 0.55$ . . . . .	160
FIG. 6.70	Distribution de Mach extrapolée à $M_r = 0.57$ à partir de $M_r = 0.55$ . . . . .	161
FIG. 6.71	Distribution de Mach extrapolée à $M_r = 0.53$ à partir de $M_r = 0.51$ . . . . .	162
FIG. 6.72	Distribution de Mach extrapolé à $M_r = 0.53$ à partir de $M_r = 0.51$ (agrandissement) . . . . .	162
FIG. 6.73	Distribution des sensibilités du nombre de Mach à $M_r = 0.51$ (agrandissement) . . . . .	163

## LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

### Caractères usuels

$a$	paramètre de design
$\mathbf{a}$	vecteur de paramètres de design
$\bar{\mathbf{a}}$	vecteur des valeurs moyennes des paramètres
$\mathbf{A}$	matrice du système
$c$	célérité du son
$c$	constante
$c_p$	chaleur massique à pression constante
$C_l$	coefficient de portance
$C_f$	coefficient de friction
$C_p$	coefficient de pression
$d$	diamètre du tube
$e$	erreur
$Ec$	nombre de Eckert
$f_u, f_v$	projections de la force volumique selon les axes
$\mathbf{f}$	force volumique
$F$	fonction objectif
$\bar{F}$	valeur moyenne de $F$
$\mathbf{F}^N$	force de traction appliquée à la frontière
$h$	taille élémentaire courante
$\mathbf{I}$	matrice identité
$J$	fonction objectif
$\mathbf{J}_R$	matrice jacobienne associée à $R$

$K$	élément du domaine $\Omega$
$M$	nombre de Mach
$n_{elem}$	nombre d'éléments du domaine $\Omega$
$\hat{n}$	vecteur unitaire normal extérieur à la surface
$Nu$	nombre de Nusselt
$N_u, N_T, \dots$	nombre de noeuds (pour $u, T, \dots$ )
$N_i^u, N_i^T, \dots$	fonctions d'interpolations (pour $u, T, \dots$ )
$p$	pression
$P$	sommet
$Pr$	nombre de Prandtl
$q$	source thermique
$r$	paramétrisation d'une frontière
$r_{cw}$	coefficient devant le travail de compressibilité de l'équation d'énergie
$Re$	nombre de Reynolds
$R_g$	constante du gaz considéré
$R$	résidu
$s_p^a$	sensibilité de la pression par rapport à $a$
$s_T^a$	sensibilité de la température par rapport à $a$
$s_u^a$	sensibilité du champ de vitesse par rapport à $a$
$S$	vecteur des termes sources
$t$	temps
$\mathbf{t}$	forces de traction
$T$	température
$T_{Tot}$	température totale
$u, v$	projections du champ de vitesse selon les axes

$u$	champ de vitesse
$U$	norme de la vitesse
$x, y, r$	abscisse, ordonnée, coordonnée radiale
$\mathbf{x}$	vecteur des coordonnées
$\mathbf{X}$	vecteur des inconnues

### Lettres grecques

$\alpha$	coefficient de compressibilité isotherme
$\alpha$	taux de convergence
$\alpha$	angle d'attaque
$\beta$	coefficient de dilatation thermique
$\delta$	petite perturbation
$\delta$	fonction de Dirac
$\delta_K$	taille cible de l'élément $K$ dans la stratégie adaptative
$\delta_p, \delta_u, \delta_T$	fonctions tests (pour la pression, la vitesse et la température)
$\Delta$	variation ou incertitude
$\epsilon_R, \epsilon_X$	critères d'arrêt
$\gamma_r$	rapport des chaleurs massiques
$\dot{\gamma}$	tenseur du taux de déformation
$\Gamma_d$	élément de frontière $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Dirichlet
$\Gamma_n$	élément de frontière $\partial\Omega$ où l'on impose des conditions de Neumann
$\lambda$	conductivité thermique
$\mu$	viscosité
$\Omega$	domaine de calcul
$\Omega_P$	sous-domaine regroupant les éléments touchant $P$

$\partial\Omega$	frontière du domaine
$\rho$	masse volumique
$\sigma_F^2$	variance associée à $F$
$\sigma$	tenseur des contraintes
$\sigma_a$	écart type associé à $a$
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses

### Indices et exposants

$b$	valeur à la frontière (condition aux limites)
$cible$	valeur cible à atteindre
$exa$	solution exacte
$h$	solution éléments finis
$i$	composante
$r$	valeur de référence
$s$	indiquant une échelle (de pression, de température)
$w$	valeur au niveau du mur
$0$	valeur nominale
$1, i, 2$	valeurs nodales en 1, $i$ , 2
$c$	compressible
$inc$	incompressible
$n$	valeur à l'étape $n$
$T$	transposée
$0$	valeur initiale
$t$	sensibilité des propriétés physiques
$\wedge$	valeur imposée (condition aux limites)

$\hat{\cdot}$	vecteur unitaire
$\sim$	valeur adimensionnalisée
$\tilde{\cdot}$	valeur normalisée
$\sim$	polynôme de projection locale

### Symboles

$\nabla$	opérateur gradient
$\nabla \cdot$	opérateur divergence
$\partial \cdot / \partial \cdot$	dérivée partielle
$d \cdot / d \cdot$	dérivée particulaire
$\  \cdot \ $	norme



## LISTE DES TABLEAUX

TAB. 1.1	Coefficients et propriétés pour les différents régimes . . . . .	18
TAB. 4.1	Erreurs exacte et estimée pour l'écoulement . . . . .	50
TAB. 4.2	Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à $M_r$ . . . . .	53
TAB. 4.3	Erreurs exacte et estimée pour l'écoulement . . . . .	59
TAB. 4.4	Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à $A_u$ . . . . .	60
TAB. 4.5	Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à $A_p$ . . . . .	61
TAB. 4.6	Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à $A_T$ . . . . .	62

## LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I	MÉTHODE DE STABILISATION . . . . .	171
I.1	Équation de continuité . . . . .	172
I.2	Équation de mouvement . . . . .	172
I.3	Équation d'énergie . . . . .	173
ANNEXE II	TERMES SOURCES POUR LES SOLUTIONS MANUFAC- TURÉES . . . . .	174
II.1	Coordonnées cartésiennes . . . . .	175
II.1.1	Équation de mouvement pour l'écoulement . . . . .	175
II.1.2	Équation d'énergie pour l'écoulement . . . . .	175
II.1.3	Équation de mouvement pour les sensibilités . . . . .	176
II.1.4	Équation d'énergie pour les sensibilités . . . . .	176
II.2	Coordonnées axisymétriques . . . . .	177
II.2.1	Équation de mouvement pour l'écoulement . . . . .	177
II.2.2	Équation d'énergie pour l'écoulement . . . . .	177
II.2.3	Équation de mouvement pour les sensibilités . . . . .	178
II.2.4	Équation d'énergie pour les sensibilités . . . . .	179

## INTRODUCTION

Un écoulement compressible est un écoulement dont la masse volumique varie en fonction de la pression et de la température. Il faut néanmoins faire la différence entre un écoulement compressible et un fluide compressible. On peut très bien étudier l'écoulement incompressible d'un fluide compressible. En réalité, tous les fluides sont, dans une certaine mesure, compressibles. Cependant, une forte pression exercée sur un liquide ne modifiera que très légèrement son volume. Par exemple, une pression de  $200.10^5 Pa$  appliquée sur de l'eau n'entraînera qu'un changement de 1% dans la densité du fluide. De même, les gaz peuvent souvent être considérés comme incompressibles. En fait, les variations de masse volumique peuvent provenir des phénomènes de compressibilité, qui sont mobilisés en aérodynamique lorsque l'ordre de grandeur du nombre de Mach est non négligeable. Ce dernier est défini comme étant le rapport de la vitesse du fluide sur la vitesse du son :

$$M = \frac{U}{c}$$

où  $c$  est donc la célérité du son.

Ce nombre de Mach est un indicateur de la compressibilité du fluide. En effet, on peut montrer, tel que l'indique Viollet <sup>[34]</sup>, que les variations relatives de masse volumique sont de l'ordre de grandeur des variations relatives de vitesse multipliées par le carré du nombre de Mach. On peut donc classer les différents régimes d'écoulement de la façon suivante :

- $M > 0.3$  : l'écoulement est compressible, les variations de vitesse induisent des variations de masse volumique qui dont il faut tenir compte.
- $M < 0.3$  : les variations de vitesse induisent des variations de masse volumique qui sont négligeables. La masse volumique peut néanmoins varier de manière significative s'il y a des sources ou des transferts de chaleur (on parle alors de fluide anélastique ou d'écoulement dilatable).

Les situations où le nombre de Mach est proche de l'unité sont nombreuses. On peut bien évidemment penser à l'écoulement autour d'une aile d'avion, ou bien également, de manière moins évidente, à l'utilisation d'appareils pour explorer la surface de planètes extraterrestres telles Mars ou Vénus <sup>[33]</sup>. En effet, la densité atmosphérique sur Mars est faible, ce qui implique que le nombre de Reynolds est très petit. Ainsi, afin de maintenir une portance suffisante sur l'appareil, la vitesse de vol doit être suffisamment importante. Le nombre de Mach est alors tel que l'on se trouve dans le régime compressible.

Notons que le nombre de Mach est une variable locale. Ceci signifie qu'il n'a pas la même valeur dans tout le domaine. On peut donc trouver dans le même domaine de calcul des régions où les effets de compressibilité ne se font pas sentir ( $M$  faible) et d'autres où ils sont importants ( $M$  élevé). Dans ces cas, il convient d'utiliser une formulation unifiée permettant de gérer la présence simultanée de ces différents régimes dans le domaine.

D'autre part, il peut être intéressant de caractériser les changements survenus dans la solution à la suite d'une modification du nombre de Mach à l'infini. Deux approches s'offrent à nous : recommencer les calculs en modifiant le paramètre (nombre de Mach), ou utiliser la méthode de l'équation des sensibilités (MES). Les sensibilités désignent le taux de variation de la solution par rapport à un paramètre de design ou d'intérêt. L'information obtenue à partir de ces gradients

est très précieuse. Elle peut servir entre autre pour le design optimal, le calcul rapide de solutions voisines, l'analyse de sensibilités ou encore l'analyse d'incertitude. Les équations des sensibilités sont obtenues en différentiant les équations de l'écoulement par rapport au paramètre d'intérêt.

Dans ce mémoire, nous avons comme objectif de proposer une formulation permettant de traiter les différents régimes suivants :

- $\rho = \text{constante}$  : écoulement incompressible
- $\rho = \rho(T)$  : écoulement anélastique
- $\rho = \rho(p, T)$  : écoulement compressible

Nous nous intéresserons également à la MES pour ces trois régimes d'écoulements. Nous en verrons des applications sur plusieurs cas.

Les équations que l'on résoud numériquement sont celles de Navier-Stokes, que l'on retrouve dans de nombreux ouvrages. Cependant, l'approche que nous employons est moins répandue. Nous proposons une écriture unique valable pour des écoulements compressibles et incompressibles (sous forme dimensionnelle ou bien adimensionnelle). On retrouve une telle unification dans les travaux de Turgeon *et al.* [30] et de Ilinca et Pelletier [11]. L'avantage d'une telle formulation permet de résoudre de manière efficace des écoulements présentant simultanément différents régimes (compressible, anélastique, incompressible).

On résoud le système d'équations avec une méthode d'éléments finis, technique générale de résolution de systèmes d'équations aux dérivées partielles. On trouvera des références bibliographiques dans les ouvrages de Reddy [24], Szabò et Basuška [27] ou bien encore dans celui de Cuvelier *et al.* [5]. Il est cependant nécessaire de stabiliser les calculs numériques. Nous avons donc recourt à une autre méthode numérique : la méthode GLS (*Galerkin Least Squares*) [10], qui ajoute des termes

supplémentaires de stabilisation à la formulation variationnelle issue de la méthode d'éléments finis. On trouvera la description complète des termes de la méthode GLS en annexe.

L'une des particularités du code de calcul utilisé est sa stratégie adaptative. Elle permet d'obtenir un bon maillage pour une solution précise. Hétu et Pelletier ont fait de nombreuses études en utilisant cette méthode pour des écoulements laminaires incompressibles [8, 9, 14]. On peut également citer les travaux de Pelletier *et al.* pour des problèmes thermiques [15] ou encore pour les transferts thermiques pour des fluides à propriétés variables [16]. Finalement, Turgeon et Pelletier ont utilisé cette stratégie pour démontrer le niveau de précision des simulateurs numériques pour une vaste gamme de problèmes [31, 20].

En ce qui concerne l'étude des sensibilités, mentionnons la thèse de Doctorat de Borggaard [3] pour sa contribution dans ce domaine. Borggaard et Pelletier ont ensuite présenté leurs travaux du côté de la mécanique des fluides [4]. Ils utilisent l'adaptation du maillage pour l'écoulement et les sensibilités, tout comme l'a fait Stewart [26]. Les travaux de Turgeon [32] dans ce domaine sont également précieux. Enfin, en ce qui concerne les écoulements compressibles, on peut se référer aux études menées par Godfrey et Cliff [6].

Ce mémoire est organisé de la façon suivante. Dans les deux premiers chapitres, nous présentons les équations des écoulements compressibles de même que les équations des sensibilités. Nous y voyons aussi la formulation employée qui propose une unification de l'écriture des équations, rendant possible les calculs en tout régime d'écoulement (incompressible, compressible) et sous forme dimensionnelle ou adimensionnelle. Le troisième chapitre est dédié à la méthodologie numérique. On y présente la méthode des éléments finis. Nous décrivons les formes faibles des équations, leur discrétisation de même que la stratégie d'adaptativité que nous

employons afin d'obtenir un maillage optimal. Le chapitre 4 est consacré à la vérification de la méthodologie de résolution. Nous utilisons pour cela la méthode des solutions manufacturées. Nous présentons un exemple en 2-D cartésien et un autre en axisymétrique. Enfin, les deux derniers chapitres feront l'objet d'applications en régime compressible. Nous y verrons l'écoulement autour d'un profil d'aile NACA0012 et également l'application à un jet axisymétrique. Dans les deux cas, une analyse de sensibilité est effectuée. Ce mémoire se termine enfin par la conclusion.

## CHAPITRE 1

### ÉQUATIONS DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

Dans ce chapitre, nous passons en revue les équations régissant les écoulements tant compressibles qu'incompressibles. Nous présentons également une forme adimensionnelle ainsi qu'une écriture unifiant les différents régimes.

#### 1.1 Les équations de Navier-Stokes

Nous utilisons les équations de Navier-Stokes : c'est-à-dire la conservation de la masse, du mouvement et de l'énergie. Dans le cas général, elles s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} \quad (1.2)$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \mathbf{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.3)$$

où les variables d'écoulements sont la vitesse  $\mathbf{u}$ , la pression  $p$  et la température  $T$ .  $\rho$  est la masse volumique,  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses,  $c_p$  la chaleur massique et  $\lambda$  la conductivité thermique.  $\mathbf{f}$  et  $q$  représentent des champs de forces volumiques et des sources thermiques.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux écoulements bidimensionnels stationnaires de gaz parfaits. Les dérivées temporelles dans les équations précédentes vont donc disparaître et nous écrirons  $\mathbf{u} = (u, v)$ . De plus, le tenseur des contraintes



visqueuses est de la forme :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$$

Nous avons un système de quatre équations (l'équation du mouvement en donne deux) à cinq inconnues ( $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ ). Nous utilisons l'équation d'état des gaz parfaits comme cinquième équation. Le système peut alors s'écrire sous la forme suivante en régime stationnaire :

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0 \quad (1.4)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} \quad (1.5)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \mathbf{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.6)$$

$$\rho = \frac{p}{R_g T} \quad (1.7)$$

$\mu$  est la viscosité du fluide et  $R_g$  est la constante du gaz considéré.

Nos inconnues principales pour ces équations sont les variables ( $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $p$ ). Lorsque nous aurons besoin de la masse volumique, celle-ci sera évaluée par l'équation (1.7). Un réarrangement de l'équation de continuité (1.4) fait disparaître les dérivées spatiales de  $\rho$ . Nous l'écrivons alors sous la forme :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho(p, T) \quad (1.8)$$

La masse volumique  $\rho$  dépend de manière générale de  $p$  et  $T$ . En développant le terme  $\nabla \rho(p, T)$  dans l'équation précédente, on obtient :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \left[ \frac{\partial \rho}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial \rho}{\partial T} \nabla T \right] \quad (1.9)$$

Introduisons le coefficient de compressibilité isotherme  $\alpha$  ainsi que le coefficient de dilatation thermique  $\beta$  définis par :

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \quad (1.10)$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \Big|_p \quad (1.11)$$

Pour un gaz parfait, on montre aisément que l'on a :

$$\alpha = \frac{1}{p} \quad (1.12)$$

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (1.13)$$

De sorte que l'équation de continuité devient :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p - \beta \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (1.14)$$

$$= \frac{1}{p} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \frac{1}{T} \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (1.15)$$

En remplaçant dans le système (1.4)-(1.7), nous avons les équations suivantes :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{p} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \frac{1}{T} \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (1.16)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu I \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} \quad (1.17)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \mathbf{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.18)$$

$$\rho = \frac{p}{R_g T} \quad (1.19)$$

## 1.2 Forme adimensionnelle

Il existe plusieurs manières d'adimensionnaliser les équations. Une simple adimensionnalisation par rapport à des valeurs de référence (qui peuvent être par exemple une vitesse à l'infini, une longueur caractéristique du problème) fournit les résultats suivants :

$$\begin{array}{llll} \tilde{x} = \frac{x}{L_r} & \tilde{T} = \frac{T}{T_r} & \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r} & \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_r} \\ \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{U_r} & \tilde{p} = \frac{p}{p_s} & \tilde{c}_p = \frac{c_p}{c_{p_r}} & \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_r} \end{array}$$

Il peut arriver que plusieurs fluides soient présents dans différentes zones du domaine. Pour cela, nous introduisons également  $R_{g_r}$ , constante évaluée à l'état de référence du gaz pris comme référence. Nous aurons ainsi  $\tilde{R}_g = \frac{R_g}{R_{g_r}}$ .

Dans l'adimensionnalisation précédente,  $p_s = \rho_r U_r^2$  représente une échelle de pression. Cette valeur provient de l'équation de mouvement ( $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \dots$ ) qui montre que la pression y joue un rôle mécanique.

L'adimensionnalisation de l'équation d'état fait apparaître une pression de référence, indiquant que dans cette équation, la pression joue un rôle thermodynamique :

$$p_r = \rho_r R_{g_r} T_r$$

Nous pouvons donc dès à présent voir que la pression joue un rôle double dans les écoulements compressibles : à la fois un rôle mécanique et un rôle thermodynamique. Nous verrons plus loin quelle particularité cela peut amener sur l'adimensionnalisation de la pression.

Dans cette adimensionnalisation, d'autres grandeurs apparaissent naturellement (dont le nombre de Mach à l'état de référence) :

$$M_r = \frac{U_r}{\sqrt{\gamma_r R_{gr} T_r}}$$

$$c_{pr} = \frac{\gamma_r R_{gr}}{\gamma_r - 1}$$

Après quelques manipulations, nous obtenons :

$$-\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{\tilde{p}} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{1}{\tilde{T}} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \quad (1.20)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \cdot \left[ \tilde{\mu} \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^T \right) - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \tilde{\mathbf{I}} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right] + \tilde{\mathbf{f}} \quad (1.21)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_p \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = (\gamma_r - 1) M_r^2 \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re Pr} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \tilde{T}) + \tilde{q} \quad (1.22)$$

$$\tilde{\rho} = \gamma_r M_r^2 \frac{\tilde{p}}{\tilde{R}_g \tilde{T}} \quad (1.23)$$

avec la définition des nombres de Reynolds  $Re$  et de Prandtl  $Pr$  :

$$Re = \frac{\rho_r U_r L_r}{\mu_r}$$

$$Pr = \frac{\mu_r c_{pr}}{\lambda_r}$$

Ces équations permettent de traiter les écoulements compressibles, mais ne conviennent pas dans le cas limite d'un très faible nombre de Mach. En effet, en regardant l'équation d'état (1.23), on peut croire que la masse volumique diminue jusqu'à atteindre zéro à mesure que le nombre de Mach tend vers zéro. En fait, la bonne interprétation de ce résultat est que la pression se comporte comme l'inverse du carré du nombre de Mach de façon à ce que l'on récupère un état incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers zéro.

### 1.2.1 Adimensionnalisation de la pression

Ce problème peut-être résolu en fournissant une bonne adimensionnalisation de la pression. Il faut, comme dit plus haut, tenir compte du double rôle de la pression. Pour voir cela, considérons l'échelle de pression :

$$p_s = \rho_r U_r^2 = \gamma_r p_r M_r^2$$

qui est représentative des différences de pression induites par l'écoulement. Nous avons donc :

$$\frac{\Delta p}{p_r} \sim M_r^2$$

Ainsi, dans le cas de très faibles nombres de Mach, ces différences de pression sont beaucoup plus petites que la pression thermodynamique  $p_r$ .

Ceci illustre le fait que la pression joue à la fois un rôle mécanique dans l'équation de mouvement, et un rôle thermodynamique dans l'équation d'état. Seuls les gradients de pression apparaissent dans l'équation de mouvement, et eux seuls ont une influence directe sur l'écoulement. Cependant, le niveau absolu de pression intervient dans l'équation d'état.

La première forme adimensionnelle proposée pour la pression fournit des différences de pression de l'ordre de un, mais la pression absolue augmente à mesure que le nombre de Mach se rapproche de zéro. Il faut donc revoir notre adimensionnalisation afin d'obtenir à la fois des différences de pression (dans l'équation de mouvement) et une pression thermodynamique (dans l'équation d'état) ayant une amplitude de l'ordre de un.

Nous arrivons donc à la forme suivante :

$$\tilde{p} = \frac{p - p_r}{p_s} = \frac{p - p_r}{\rho_r U_r^2}$$

Les équations (1.16)-(1.19) deviennent alors :

$$-\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\gamma_r M_r^2}{\gamma_r M_r^2 \tilde{p} + 1} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{1}{\tilde{T}} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \quad (1.24)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \cdot \left[ \tilde{\mu} \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^T \right) - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \mathbf{I} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right] + \tilde{\mathbf{f}} \quad (1.25)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_p \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = (\gamma_r - 1) M_r^2 \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re Pr} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \tilde{T}) + \tilde{q} \quad (1.26)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\gamma_r M_r^2 \tilde{p} + 1}{\tilde{R}_g \tilde{T}} \quad (1.27)$$

On peut donc voir que ce système est bien posé dans la limite où le nombre de Mach tend vers zéro. On obtient alors les équations pour les écoulements anélastiques, qui sont appropriées pour les écoulements fortement chauffés.

$$-\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\tilde{T}} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \quad (1.28)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \cdot \left[ \tilde{\mu} \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^T \right) - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \mathbf{I} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right] + \tilde{\mathbf{f}} \quad (1.29)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_p \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = \frac{1}{Re Pr} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \tilde{T}) + \tilde{q} \quad (1.30)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\tilde{R}_g \tilde{T}} \quad (1.31)$$

Il reste cependant à examiner un autre cas limite : celui d'un écoulement incompressible dont les propriétés sont constantes.

Ceci se produit lorsque les différences de température sont petites et lorsque le

nombre de Mach est très faible. Dans ce cas là, l'équation d'état (1.27) ne se réduit pas à  $\tilde{\rho} = 1$  (cas incompressible), comme on s'y attendrait. Il est donc nécessaire de bien adimensionnaliser la température.

### 1.2.2 Adimensionnalisation de la température

La situation est semblable à celle rencontrée plus haut pour l'adimensionnalisation de la pression. Les différences de température sont petites comparées à la température absolue.

L'adimensionnalisation suivante (à l'aide d'un état de référence  $T_r$  et d'une échelle de température  $T_s$ , représentant les différences de température) permet de récupérer des amplitudes de variation de l'ordre de un tant pour les différences de température que pour la température absolue :

$$\tilde{T} = \frac{T - T_r}{T_s}$$

Nous obtenons alors le système :

$$-\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \frac{\gamma_r M_r^2}{\gamma_r M_r^2 \tilde{p} + 1} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{\frac{T_s}{T_r}}{\frac{T_s}{T_r} \tilde{T} + 1} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} \quad (1.32)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla} \cdot \left[ \tilde{\mu} \left( \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}^T \right) - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \tilde{I} \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right] + \tilde{\mathbf{f}} \quad (1.33)$$

$$\tilde{\rho} \tilde{c}_p \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T} = Ec \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re Pr} \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\lambda} \tilde{\nabla} \tilde{T}) + \tilde{q} \quad (1.34)$$

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\tilde{R}_g} \frac{\gamma_r M_r^2 \tilde{p} + 1}{\frac{T_s}{T_r} \tilde{T} + 1} \quad (1.35)$$

où  $Ec$  est le nombre de Eckert :

$$Ec = \frac{(\gamma_r - 1)M_r^2}{\frac{T_s}{T_r}}$$

Ainsi, on peut retrouver les équations des écoulements incompressibles en imposant  $M_r = 0$  et  $T_s/T_r = 0$  dans les équations précédentes. On peut montrer que l'indétermination apparaissant alors sur la valeur de  $Ec$  peut être levée et qu'il convient d'imposer  $Ec = 0$  [13, 30].

### 1.3 Unification des écritures

Dans cette section, nous allons voir l'écriture des équations correspondant aux écoulements compressibles et incompressibles, sous leur forme dimensionnelle et adimensionnelle. Nous serons ainsi en mesure de fournir une écriture unique valable pour les deux régimes et les deux écritures dimensionnelle et adimensionnelle.

Notons que pour les calculs dimensionnels, nous introduisons également un état de référence  $(p_r, T_r)$  afin de transcrire le double rôle joué par la pression et la température.

Les paragraphes suivants donnent l'écriture des équations dans les différents cas, ceci afin d'en sortir les similitudes pour une écriture unique.

Pour plus de clarté, nous avons omis les tildes ( $\sim$ ) sur les variables adimensionnelles.



### 1.3.1 Écoulement compressible, écriture dimensionnelle

Nous reprenons ici les équations (1.16)-(1.19). La pression et la température sont différentes d'une constante par rapport au système précédent, puisque l'on introduit l'état de référence  $(p_r, T_r)$ .

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{p + p_r} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \frac{1}{T + T_r} \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (1.36)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} \quad (1.37)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \mathbf{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.38)$$

$$\rho = \frac{1}{R_g} \frac{p + p_r}{T + T_r} \quad (1.39)$$

### 1.3.2 Écoulement incompressible, écriture dimensionnelle

La masse volumique  $\rho$  est ici constante. Le terme de droite de l'équation (1.36) correspondant au terme  $\frac{1}{\rho} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho$  va donc être nul. Nous voyons donc sur l'équation (1.40) que la divergence de  $\mathbf{u}$  est nulle. Ainsi le dernier terme entre parenthèses de l'équation de mouvement (1.37) disparaît. Enfin, le travail de compressibilité est nul dans le cas d'un écoulement incompressible, d'où l'absence du terme  $\mathbf{u} \cdot \nabla p$  dans l'équation d'énergie (1.42).

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.40)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{f} \quad (1.41)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.42)$$

$$\rho = \rho_0 \quad (1.43)$$

### 1.3.3 Écoulement compressible, écriture adimensionnelle

Nous utilisons ici le système (1.32)-(1.35). Par rapport à l'écriture dimensionnelle, nous voyons apparaître les valeurs de référence, ainsi que les nombres sans dimensions ( $Re$ ,  $Pr$ ,  $Ec$ ).

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\gamma_r M_r^2}{\gamma_r M_r^2 p + 1} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \frac{\frac{T_s}{T_r}}{\frac{T_s}{T_r} T + 1} \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (1.44)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} \quad (1.45)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = Ec \mathbf{u} \cdot \nabla p + \frac{1}{Re Pr} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.46)$$

$$\rho = \frac{R_{gr}}{R_g} \frac{\gamma_r M_r^2 p + 1}{\frac{T_s}{T_r} T + 1} \quad (1.47)$$

### 1.3.4 Écoulement incompressible, écriture adimensionnelle

Les équations (1.48)-(1.51) peuvent être obtenues ou bien en adimensionnalisant l'écriture dimensionnelle des écoulements incompressibles (1.40)-(1.43), ou bien en faisant disparaître les termes des équations (1.44)-(1.47) qui correspondent à une masse volumique variable, comme cela a déjà été fait plus haut.

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.48)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{f} \quad (1.49)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{RePr} \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.50)$$

$$\rho = 1 \quad (1.51)$$

### 1.3.5 Écriture unique

À la vue de ces systèmes d'équations, nous voyons que nous pouvons tous les représenter par l'écriture générale suivante :

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\alpha_r}{\alpha_r p + 1} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \frac{\beta_r}{\beta_r T + 1} \mathbf{u} \cdot \nabla T \quad (1.52)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] + \mathbf{f} \quad (1.53)$$

$$\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q \quad (1.54)$$

$$\rho = \rho_r \frac{\alpha_r p + 1}{\beta_r T + 1} \quad (1.55)$$

Les valeurs que l'on va ensuite donner aux différents coefficients et propriétés détermineront le type de régime dans lequel on se trouve.

Notons que dans le cas incompressible, le terme  $-\frac{2}{3}\mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$  n'apparaît pas. Cependant, l'équation de continuité va forcer le terme  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  à être petit. Il s'en suit que le terme supplémentaire  $-\frac{2}{3}\mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$  dans l'équation de mouvement disparaît de lui même.

Le tableau 1.1 résume les différentes valeurs à fournir pour les différents régimes.

TAB. 1.1 Coefficients et propriétés pour les différents régimes

	Dimensionnel		Adimensionnel	
	Compr.	Incompr.	Compr.	Incompr.
$\alpha_r$	$\frac{1}{p_r}$	0	$\frac{p_s}{p_r} = \gamma_r M_r^2$	0
$\beta_r$	$\frac{1}{T_r}$	0	$\frac{T_s}{T_r}$	0
viscosité	$\mu$	$\mu$	$\frac{1}{Re} \frac{\mu}{\mu_r}$	$\frac{1}{Re} \frac{\mu}{\mu_r}$
chaleur spécifique	$c_p$	$c_p$	$\frac{c_p}{c_{pr}}$	$\frac{c_p}{c_{pr}}$
$r_{cw}$	1	0	$E_c = \frac{(\gamma_r - 1) M_r^2}{\frac{T_s}{T_r}}$	0
conductivité	$\lambda$	$\lambda$	$\frac{1}{Re Pr} \frac{\lambda}{\lambda_r}$	$\frac{1}{Re Pr} \frac{\lambda}{\lambda_r}$
$\rho_r$	$\frac{p_r}{R_g T_r}$	$\rho_0$	$\frac{R_{gr}}{R_g}$	1

Remarquons que nous avons préféré écrire au final l'équation d'état sous la forme  $\rho = \rho_r \frac{\alpha_r p + 1}{\beta_r T + 1}$  plutôt que d'utiliser explicitement la constante  $R_g$ . L'écriture est alors plus agréable, mais reste identique.

## CHAPITRE 2

### MÉTHODE DE L'ÉQUATION DES SENSIBILITÉS

Dans ce chapitre, nous verrons la méthode de l'équation des sensibilités. Nous commencerons par définir le terme *sensibilité*, tout en voyant quels sont les domaines d'application des sensibilités. Nous regarderons ensuite en détail les équations à résoudre dans la MES.

#### 2.1 Les sensibilités

##### 2.1.1 Définition

On désigne par *sensibilité* le taux de variation d'une variable par rapport à un paramètre décrivant le système. La sensibilité correspond donc au gradient de la variable par rapport au paramètre. Elle indique le comportement de cette variable face à une petite variation du paramètre choisi.

Afin de bien comprendre cette notion, prenons par exemple le cas simple d'un problème de conduction de chaleur unidimensionnel dans une tige composée de deux matériaux comme celui présenté sur la figure 2.1. La température, linéaire par morceaux, est non simplement fonction de l'abscisse  $x$ , elle dépend également de toute une série de paramètres, à savoir la température à gauche et à droite, la longueur des matériaux, la conductivité de chaque matériau. On écrit donc :

$$T = T(x; T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_i, x_2)$$

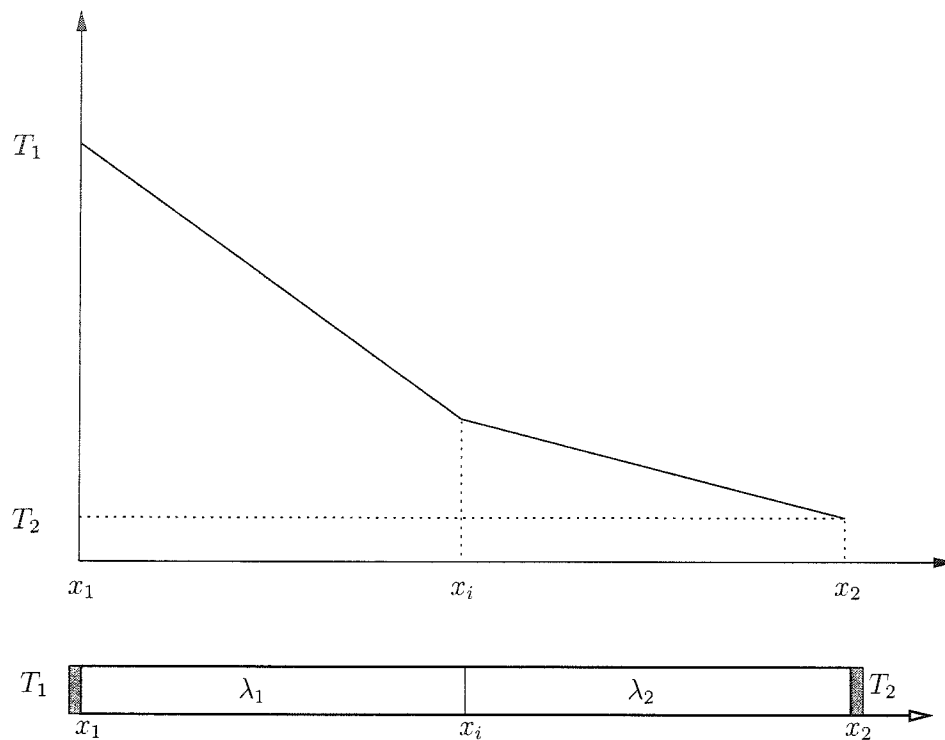


FIG. 2.1 Matériau composite

Par définition, la sensibilité de la température par rapport à l'un de ces paramètres  $a$  s'écrit :

$$s_T^a = \frac{\partial T}{\partial a}$$

$$a \in \{T_1, T_2, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_i, x_2\}$$

La sensibilité de la température par rapport à ce paramètre va donc décrire la manière dont réagit le système à une perturbation du paramètre  $a$  autour de sa valeur nominale  $a_0$ . La sensibilité est une grande source d'information qui permet une connaissance encore plus précise du système considéré.

### 2.1.2 Utilité des sensibilités

Les sensibilités apportent une information très précieuse qui peut être utilisée pour de nombreuses applications. Nous allons passer quelques unes en revue.

#### 2.1.2.1 Design optimal

On cherche ici à minimiser une fonctionnelle  $J$  définie par :

$$J(\mathbf{u}(a), p(a), T(a), a)$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse,  $p$  le champ de pression,  $T$  le champ de température et  $a$  est le paramètre de design. Notons que  $J$  dépend de  $a$ , de même que toutes les autres variables. En différentiant  $J$  par rapport à  $a$ , on obtient :

$$\frac{dJ}{da} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{u}} \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}}_{s_u} + \frac{\partial J}{\partial p} \underbrace{\frac{\partial p}{\partial a}}_{s_p} + \frac{\partial J}{\partial T} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial a}}_{s_T} + \frac{\partial J}{\partial a}$$

On voit donc apparaître les sensibilités des variables  $(\mathbf{u}, p, T)$ . Le calcul des coefficients par la méthode des sensibilités donne directement des évaluations du gradient de  $J$ .

#### 2.1.2.2 Calcul rapide de solutions voisines

Prenons le cas d'une aile d'avion. Nous effectuons des calculs pour une certaine valeur d'un paramètre (le nombre de Mach à l'infini  $M_\infty$  par exemple). On cherche à savoir par exemple comment va varier le coefficient de pression au niveau de l'aile



si on modifie  $M_r$ . Celui-ci est donné par la formule :

$$C_p = \frac{p - p_r}{\frac{1}{2}\rho_r U_r^2} \quad (2.1)$$

Au lieu de relancer tous les calculs pour une nouvelle valeur de  $M_r$ , on peut approximer la solution en utilisant un développement en série de Taylor :

$$C_p(x, M_r + \delta M_r) \simeq C_p(x, M_r) + \left. \frac{\partial C_p}{\partial M_r} \right|_{M_r} \delta M_r \quad (2.2)$$

Il suffit donc d'évaluer la sensibilité de  $C_p$  (à l'aide de la sensibilité de la pression) pour avoir une approximation bon marché des solutions proches (pour de petites valeurs de  $\delta M_r$ ).

### 2.1.2.3 Analyse de sensibilités

La MES fournit les sensibilités dans tout le domaine de calcul. On peut ainsi identifier les zones les plus sensibles aux paramètres de design. Par exemple, autour d'un profil d'aile NACA0012, une variation de l'angle d'attaque va engendrer une dépression d'un côté du profil et une surpression de l'autre côté. Par contre, la sensibilité de la pression est quasi nulle dans tout le reste du domaine. La vitesse horizontale, quant à elle, va plutôt être affectée dans la zone arrière du profil et dans le sillage de l'aile. D'un côté, elle va être accélérée, et de l'autre, ralentie. Cette sensibilité est pratiquement nulle ailleurs. L'analyse de sensibilités permet donc d'identifier les différentes zones sensibles suivant les différentes variables : à l'avant du profil pour la pression, à l'arrière et dans son sillage pour la vitesse.

#### 2.1.2.4 Identification des paramètres dominants

Il est parfois important de connaître les paramètres d'étude ayant les effets les plus importants (design expérimental). Ceci est possible en comparant les coefficients de sensibilités. Ceux-ci ont en général des ordres de grandeur et des unités différents. Si l'on étudie deux paramètres  $a$  et  $b$  et que l'on veut comparer leur influence sur l'écoulement, il est alors utile et nécessaire de normaliser les résultats. On définit la sensibilité normalisée de  $u$  par rapport à un paramètre  $a$  de la façon suivante :

$$\tilde{s}_u^a = a_0 \frac{\partial u}{\partial a}$$

où  $a_0$  est la valeur nominale de  $a$ .

De cette manière,  $\tilde{s}_u^a$  et  $\tilde{s}_u^b$  ont toutes deux les mêmes unités de vitesse. La comparaison des sensibilités est donc effectuée sur une base rigoureuse.

En comparant les effets de plusieurs sensibilités normalisées, on peut ainsi déterminer le ou les paramètres dominants.

#### 2.1.2.5 Analyse d'incertitude

Le principe de l'analyse d'incertitude est de déterminer l'incertitude d'une variable de réponse d'un système causée par les incertitudes des inputs. Dans toute expérience, il existe une certaine plage d'incertitude sur les paramètres d'entrée du système. La figure 2.2 montre la cascade d'incertitude sur les paramètres d'input se répercutant sur la réponse de l'écoulement au travers du code de simulation. La MES donne un estimé de la plage de variation de la réponse.

On peut par exemple considérer une approche statistique comme celle présentée

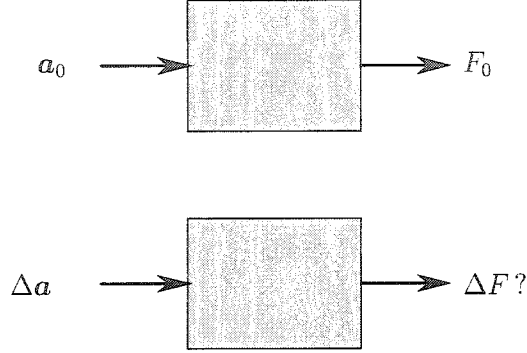


FIG. 2.2 Calcul de l'incertitude

par Putko *et al.* <sup>[23]</sup>. Les paramètres d'étude sont  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , statistiquement indépendants, et ayant une distribution normale aléatoire autour d'une valeur nominale ou moyenne  $\bar{\mathbf{a}} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ . Soit  $\sigma_{\mathbf{a}} = (\sigma_{a_1}, \dots, \sigma_{a_n})$  l'écart type associé à  $\mathbf{a}$ , et soit  $F$  la variable de réponse. On peut alors écrire les valeur moyenne  $\bar{F}$  et variance associée  $\sigma_F^2$  :

$$\bar{F} = F(\bar{\mathbf{a}})$$

$$\sigma_F^2 = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{\partial F}{\partial a_i} \sigma_{a_i} \right)^2}_{s_F^{a_i}}$$

Les sensibilités ( $s_F^{a_i}$ ) relient l'incertitude des paramètres d'entrée ( $\sigma_{a_i}$ ) à l'incertitude de la réponse ( $\sigma_F$ ).

### 2.1.3 Calcul des sensibilités

Il existe plusieurs méthodes pour calculer les sensibilités. On peut les classer en deux catégories. La différence se situe dans l'ordre des opérations de discrétisation et de différentiation. Il est en effet possible de discrétiser les équations continues

de l'écoulement puis ensuite de différentier les équations discrètes obtenues. On parle alors de la méthode des sensibilités discrètes. L'autre méthode consiste à différentier les équations continues pour l'écoulement en premier lieu pour obtenir des équations pour les sensibilités, puis de discrétiser ces équations continues obtenues. On parle alors de la méthode de l'équation des sensibilités. Le résultat final est dans tous les cas un système d'équations discrètes.

Les deux méthodes sont différentes, puisque les opérations de discrétisation et de différentiation ne commutent pas. Elles ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients. La première approche donne des gradients qui correspondent exactement aux dérivées de la solution discrète obtenue pour l'écoulement. Elle est également plus facile à implanter numériquement. La deuxième approche est, quant à elle, mathématiquement plus simple. On évite la différentiation de termes non différentiables tels les termes de stabilisation et les limiteurs.

Cependant, les deux approches, continue et discrète, donnent en principe asymptotiquement la même solution.

Le code employé utilise ici la méthode de l'équation des sensibilités (discrétisation des sensibilités continues). Les équations des sensibilités seront donc obtenues en différentiant de manière implicite les équations pour l'écoulement.

## 2.2 Les équations des sensibilités

Pour l'analyse de sensibilités, chaque variable est considérée comme étant à la fois dépendante des coordonnées d'espace et du paramètre  $a$ . On écrit donc par exemple  $u = u(x; a)$ .

Les sensibilités des différentes variables par rapport au paramètre  $a$  s'écrivent :

$$s_u^a = \frac{\partial u}{\partial a} \quad s_p^a = \frac{\partial p}{\partial a} \quad s_T^a = \frac{\partial T}{\partial a}$$

Les sensibilités des propriétés du fluide et des autres paramètres d'écoulement s'écrivent avec un  $(')$  pour les différencier des variables d'écoulement. Par exemple :

$$\mu'_a = \frac{d\mu}{da} \quad \lambda'_a = \frac{d\lambda}{da}$$

(N'oublions pas que d'une manière générale, on va avoir  $\mu = \mu(\mathbf{u}(a), p(a), T(a), a)$ . On doit donc considérer la dérivée totale ou matérielle.)

Dans la suite, lorsqu'il sera évident que l'on parle du paramètre  $a$ , nous allégerons les écritures et nous utiliserons simplement  $s_u$  pour la sensibilité de  $u$  par exemple.

Nous partons donc du système (1.52)-(1.55), que nous allons différentier pour obtenir les équations pour les sensibilités.

### 2.2.1 Équation de continuité

La différentiation de l'équation (1.52) donne :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{s}_u &= \alpha' \mathbf{u} \cdot \nabla p + \alpha (\mathbf{s}_u \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla s_p) \\ &\quad - \beta' \mathbf{u} \cdot \nabla T - \beta (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) \end{aligned} \quad (2.3)$$

où

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\alpha_r}{\alpha_r p + 1} \\ \beta &= \frac{\beta_r}{\beta_r T + 1} \\ \alpha' &= \frac{\alpha'_r}{\alpha_r p + 1} - \frac{\alpha_r (\alpha'_r p + \alpha_r s_p)}{(\alpha_r p + 1)^2} \\ \beta' &= \frac{\beta'_r}{\beta_r T + 1} - \frac{\beta_r (\beta'_r T + \beta_r s_T)}{(\beta_r T + 1)^2}\end{aligned}$$

### 2.2.2 Équation de mouvement

L'équation de mouvement (1.53) devient, après différentiation :

$$\begin{aligned}\rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho (\mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) &= -\nabla s_p \\ &+ \nabla \cdot [\mu' (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ &+ \mu (\nabla \mathbf{s}_u + \nabla \mathbf{s}_u^T) \\ &- \frac{2}{3} \mu' \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{s}_u] + \mathbf{f}'\end{aligned}\quad (2.4)$$

### 2.2.3 Équation d'énergie

L'équation d'énergie pour les sensibilités est la suivante :

$$\begin{aligned}(\rho' c_p + \rho c'_p) \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) &= r'_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p \\ &+ r_{cw} (\mathbf{s}_u \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla s_p) \\ &+ \nabla \cdot (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) + q'\end{aligned}\quad (2.5)$$

### 2.2.4 Équation d'état

Enfin, l'équation d'état des gaz parfaits pour les sensibilités est :

$$\rho' = \rho \left( \frac{\rho_r'}{\rho_r} + \frac{\alpha_r' p + \alpha_r s_p}{\alpha_r p + 1} - \frac{\beta_r' T + \beta_r s_T}{\beta_r T + 1} \right) \quad (2.6)$$

## 2.3 Conditions aux limites

Comme pour l'écoulement, on ne peut résoudre le système d'équations précédent qu'en spécifiant des conditions aux limites adéquates que l'on obtient en différentiant les conditions aux limites de l'écoulement par rapport au paramètre  $a$ .

Les conditions de Dirichlet et de Neumann pour l'écoulement s'écrivent :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; a) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_b; a) \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.7)$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^N \quad \text{sur } \Gamma_n \quad (2.8)$$

avec le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma} = [-p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T - \frac{2}{3}\mathbf{I}\nabla \cdot \mathbf{u})]$

Les frontières  $\Gamma_d$  et  $\Gamma_n$  peuvent dépendre de  $a$  (paramètre de forme) ou non (paramètre de valeur). La figure 2.3 montre cette dépendance : un changement de  $a$  peut amener une partie de la frontière du domaine  $\partial\Omega$  à bouger.

### 2.3.1 Conditions de Dirichlet

Nous écrivons dans le cas général :

$$\mathbf{u}(x(a), y(a); a) = \hat{\mathbf{u}}(x_b(a), y_b(a); a) \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.9)$$

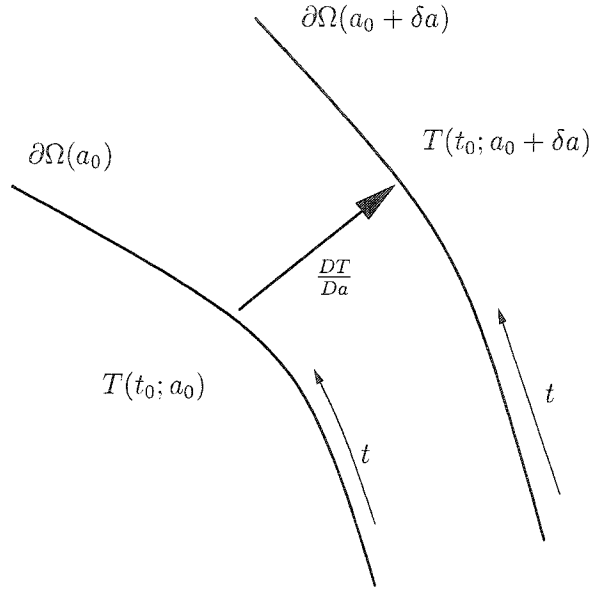


FIG. 2.3 Conditions aux limites pour un paramètre de forme

En différentiant par rapport à  $a$  :

$$\frac{d\mathbf{u}}{da} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial a}}_{\mathbf{s}_u} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x_b}{\partial a} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y_b}{\partial a} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{da} \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.10)$$

La condition aux limites pour la sensibilité s'écrit donc :

$$\mathbf{s}_u = \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{da} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x_b}{\partial a} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y_b}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.11)$$

Notons que l'expression (2.11) est valable aussi bien pour les paramètres de forme que de valeur. En effet, dans le cas d'un paramètre de valeur, la frontière ne dépend pas de  $a$ , donc  $\frac{\partial x_b}{\partial a}$  et  $\frac{\partial y_b}{\partial a}$  sont nuls et (2.11) se réduit à :

$$\mathbf{s}_u = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial a} \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (2.12)$$



Pour illustrer ceci, prenons le cas d'un tuyau de hauteur  $a$  connecté à un réservoir tel que représenté sur la figure 2.4.

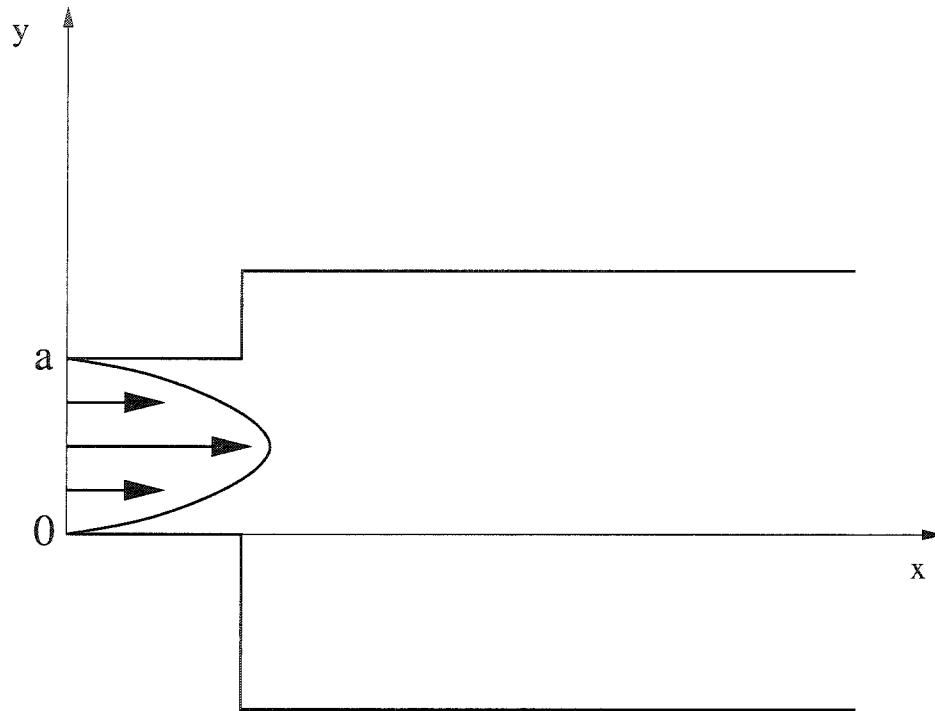


FIG. 2.4 Géométrie du tuyau débouchant sur un réservoir

On considère que le débit dans le tuyau est constant et indépendant de  $a$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} x_b &= 0 \\ y_b &= ar \quad r \in [0, 1] \\ \hat{u} &= \frac{4r(1-r)}{a} \end{aligned}$$

$r$  permettant une paramétrisation de la frontière.

Nous voulons connaître la sensibilité de  $u$  par rapport à  $a$ . Il faut donc calculer la condition aux limites pour  $s_u$  dans le tuyau.

Ici, les coefficients  $\frac{\partial x_b}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial y_b}{\partial a}$  et  $\frac{d\hat{u}}{da}$  sont les suivants :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_b}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial y_b}{\partial a} &= r \\ \frac{d\hat{u}}{da} &= -\frac{4r(1-r)}{a^2}\end{aligned}$$

Ainsi, la condition aux limites en entrée pour  $s_u$  est :

$$s_u = -\frac{4r(1-r)}{a^2} - \frac{\partial u}{\partial y} r$$

### 2.3.2 Conditions de Neumann

Reprenons l'expression (2.8), indiquant une condition de Neumann :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^N \quad \text{sur } \Gamma_n \quad (2.13)$$

Les sensibilités des forces de surface sont :

$$\mathbf{s}_t = \mathbf{s}_\sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \quad (2.14)$$

Puisque  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}(a); a)$ , en différentiant par rapport à  $a$  nous avons :

$$\mathbf{s}_\sigma \cdot \hat{\mathbf{n}} + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} \frac{\partial x_b}{\partial a} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial y} \frac{\partial y_b}{\partial a} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}' = \frac{d\mathbf{F}^N}{da} \quad \text{sur } \Gamma_n \quad (2.15)$$

d'où la condition aux limites suivante :

$$s_t = \frac{d\mathbf{F}^N}{da} - \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial x} \frac{\partial x_b}{\partial a} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial y} \frac{\partial y_b}{\partial a} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \text{sur } \Gamma_n \quad (2.16)$$

Là encore, le terme entre parenthèse disparaît dans le cas d'un paramètre de valeur.

## CHAPITRE 3

### RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

Une fois le problème correctement modélisé par l'intermédiaire des équations obtenues dans les chapitres précédents, il reste encore à les résoudre. Dans la plupart des cas, il n'existe pas de solutions analytiques. Nous avons donc recours à un code de calcul numérique utilisant un algorithme d'éléments finis.

Dans ce chapitre, nous présenterons la méthode des éléments finis. Ainsi, nous décrirons les étapes pour arriver à une formulation variationnelle, la manière dont le domaine est discrétisé pour transformer le problème initial continu en un problème discret rendant la résolution possible. Nous verrons également comment sont traitées les sensibilités. Enfin, nous examinerons plus en détails l'estimateur d'erreur, un des éléments clés de notre stratégie adaptative.

#### 3.1 Méthode des éléments finis

##### 3.1.1 Formulation variationnelle

Le but de cette manipulation est de réduire l'ordre des dérivées présentes dans les équations à résoudre. Le principe est de multiplier les équations (1.52), (1.53) et (1.54) par des fonctions test (respectivement  $\delta p$ ,  $\delta \mathbf{u}$  et  $\delta T$ ), puis d'intégrer par partie certains termes des équations. On obtient alors la formulation variationnelle de notre système pour l'écoulement :

– équation de continuité

$$\int_{\Omega} (-\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta p \, d\Omega = \int_{\Omega} (\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p) \delta p \, d\Omega - \int_{\Omega} (\beta \mathbf{u} \cdot \nabla T) \delta p \, d\Omega \quad (3.1)$$

– équation de mouvement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega &= \int_{\Omega} p \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[ 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2}{3}\mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.2)$$

– équation d'énergie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T) \delta T \, d\Omega &= \int_{\Omega} (r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p) \delta T \, d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla (\delta T) \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\lambda \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}}) \delta T \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} q \delta T \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

où le tenseur des déformations  $\dot{\gamma}(\mathbf{u})$  est défini par :

$$\dot{\gamma}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

Les intégrales de bord apparaissent suite à l'intégration par parties des équations de mouvement et d'énergie. En pratique, les fonctions tests ( $\delta \mathbf{u}$  et  $\delta T$ ) sont choisies de telle manière à ce qu'elles s'annulent sur les frontières du domaine là où des conditions de Dirichlet ont été imposées :

$$\delta T \in H_{0,\Omega}^1 = \{ \phi \in H_{\Omega}^1 \mid \phi = 0 \text{ sur } \Gamma_d^T \}$$

Il suffit alors de conserver uniquement l'intégrale sur la partie  $\Gamma_n$  de  $\partial\Omega$ . Les conditions aux frontières de la vitesse et de la température n'ont pas à observer la

même géométrie. Ainsi on a :

$$\begin{array}{lll} \Gamma_d^u \cup \Gamma_n^u = \partial\Omega & \text{et} & \Gamma_d^u \cap \Gamma_n^u = \emptyset \\ \Gamma_d^T \cup \Gamma_n^T = \partial\Omega & \text{et} & \Gamma_d^T \cap \Gamma_n^T = \emptyset \end{array}$$

On peut donc imposer une vitesse nulle (condition de Dirichlet sur la vitesse) sur une frontière où le flux de chaleur est nul (condition de Neumann sur la température). C'est par exemple le cas sur une paroi adiabatique.

Il est à noter également que l'on peut ajouter des termes de stabilisation dans les formes obtenues plus haut. Ils permettent, comme leur nom l'indique, de stabiliser les calculs numériques et ainsi donnent une convergence plus aisée et une meilleure solution. Le lecteur curieux trouvera en annexe les formulations *Galerkin Least Square* (GLS) pour les équations de l'écoulement.

### 3.1.2 Discrétisation

Une fois la forme faible obtenue, il faut ensuite la discrétiser, ceci afin d'obtenir un système matriciel plus facile à résoudre. Pour cela, nous découpons le domaine en éléments. Les calculs seront effectués par la suite sur chacun de ces éléments.

Nous utilisons ici l'élément de Taylor-Hood. La figure 3.1 présente la disposition des nœuds de calcul. On approche la pression à l'aide d'interpolants linéaires (continus), et la vitesse et la température à l'aide d'interpolants quadratiques. Il y a donc 12 degrés de liberté en vitesse, 6 en température et 3 en pression sur chaque élément. L'ordre de convergence de cet élément est  $O(h^2)$ .

Une fois le domaine discrétisé, il reste à interpoler la solution. On remplace dans la

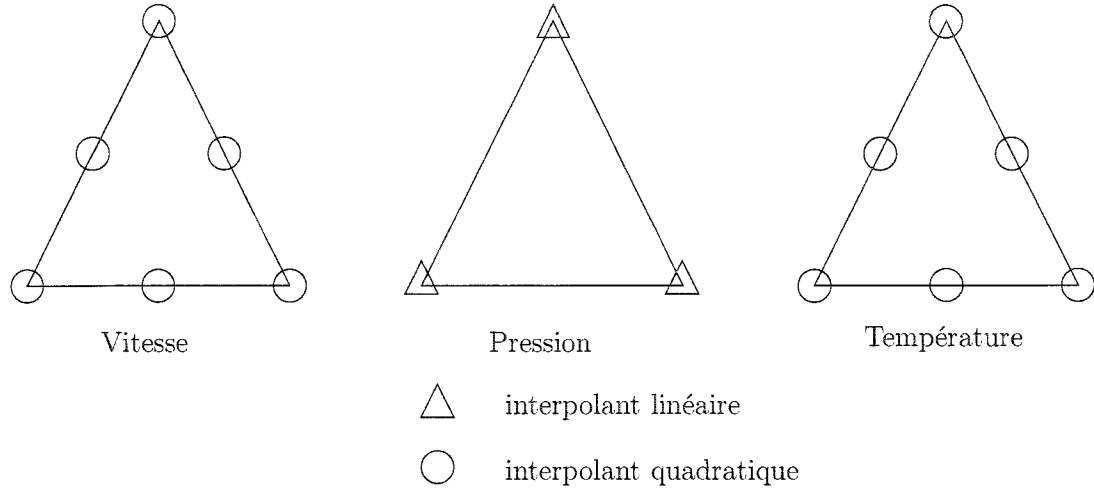


FIG. 3.1 Élément de Taylor-Hood

formulation variationnelle obtenue précédemment les différentes variables d'écoulement par des sommes pondérées de fonctions d'interpolation :

$$\begin{aligned}
 u_h &= \sum_{j=1}^{N_u} u_j N_j^u & v_h &= \sum_{j=1}^{N_v} v_j N_j^v \\
 p_h &= \sum_{j=1}^{N_p} p_j N_j^p & T_h &= \sum_{j=1}^{N_T} T_j N_j^T
 \end{aligned}$$

où, par exemple,  $u_h$  est la solution approximée,  $N_u$  le nombre de nœuds de calcul,  $u_j$  les valeurs nodales et  $N_j^u$  les fonctions d'interpolation.

La méthode de Galerkin consiste à choisir les fonctions d'interpolation comme fonctions test. Cela revient à choisir :

$$\begin{aligned}
 \delta u_i &= N_i^u & \delta v_i &= N_i^v \\
 \delta p_i &= N_i^p & \delta T_i &= N_i^T
 \end{aligned}$$

### 3.1.3 Résolution

En remplaçant dans les équations (3.1),(3.2) et (3.3) les variables par leurs approximations discrètes, on obtient un système à résoudre de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_u \\ f_v \\ 0 \\ q \end{bmatrix}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{S}$$

Cependant, ce système est non-linéaire, puisque la vitesse est présente à l'intérieur de la matrice  $\mathbf{A}$ . Cela nécessite donc une résolution itérative. Nous choisissons la méthode de Newton. Nous nous fixons les critères d'arrêt  $\epsilon_{\mathbf{X}}$  sur  $\mathbf{X}$  et  $\epsilon_{\mathbf{R}}$  sur  $\mathbf{R}$ . Le système à résoudre est donc :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{S} = 0$$

En se fixant une approximation initiale  $\mathbf{X}^0$  de la solution, on cherche à résoudre à chaque étape le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{R}}(\mathbf{X}^n)\delta\mathbf{X} &= -\mathbf{R}(\mathbf{X}^n) \\ \text{et} \quad \mathbf{X}^{n+1} &= \mathbf{X}^n + \delta\mathbf{X} \end{aligned}$$



où  $\mathbf{J}_R$  est la matrice jacobienne :

$$\mathbf{J}_R = \left[ \frac{\partial R_i}{\partial X_j} \right]$$

La convergence est atteinte si, après l'étape  $n$  :

$$\frac{\|\delta \mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}^{n+1}\|} < \epsilon_X \quad \text{et} \quad \|\mathbf{R}(\mathbf{X}^{n+1})\| \leq \epsilon_R$$

Enfin, précisons que les coefficients de la matrice jacobienne sont évalués par différences finies.

### 3.2 Traitement des sensibilités

Le calcul des sensibilités se fait indépendamment de celui de l'écoulement. Une fois toutes les grandeurs pour l'écoulement obtenues, elles sont utilisées dans la résolution des équations (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6).

Comme ces équations sont linéaires, elles sont plutôt faciles à résoudre. Dans le code utilisé, la structure de résolution pour les sensibilités est quasiment identique à celle utilisée pour l'écoulement. La méthode de Newton peut alors sembler de trop. Cependant, elle a été conservée à cause de la simplicité de son implantation et du fait que l'usage de techniques de stabilisation peut résulter en un système non linéaire même si l'équation aux dérivées partielles est linéaire. Elle permet également une grande souplesse quant à la construction des matrices élémentaires.

### 3.3 Estimation d'erreur

Un des éléments clés dans notre processus de maillage adaptatif est l'estimation d'erreur, qui identifie les régions où le maillage doit être ajusté.

Le code utilisé approche la différence entre la solution numérique et la solution exacte généralement inconnue.

Introduisons avant tout les normes (ou plus exactement semi-normes) utilisées pour les calculs (celles-ci sont différentes d'une variable à une autre, cependant, nous garderons la même notation par simplicité d'écriture) :

– pour la pression :

$$||p||^2 = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla p \, d\Omega \quad (3.4)$$

– pour la vitesse :

$$||\mathbf{u}||^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\epsilon} \, d\Omega \quad (3.5)$$

où  $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u}$

– pour la température :

$$||T||^2 = \int_{\Omega} \nabla T \cdot \nabla T \, d\Omega \quad (3.6)$$

L'erreur sur les différentes variables est :

$$\begin{aligned} ||e_{exa}^p|| &= ||p_{exa} - p_h|| \\ ||e_{exa}^{\mathbf{u}}|| &= ||\mathbf{u}_{exa} - \mathbf{u}_h|| \\ ||e_{exa}^T|| &= ||T_{exa} - T_h|| \end{aligned}$$

où le suffixe *exa* représente la solution exacte et le suffixe *h* la solution éléments finis calculée.

L'erreur fait donc intervenir le gradient des variables. Pour une variable  $Q$ , le gradient de la solution éléments finis  $\nabla Q_h$  est connu alors que celui de la solution exacte  $\nabla Q_{exa}$  ne l'est pas. De plus, le gradient de la solution éléments finis est discontinu. L'idée, proposée par Zienkiewicz et Zhu <sup>[35]</sup>, est donc de projeter ces gradients discontinus sur une base polynômiale d'un ordre supérieur.

Pour chaque sommet  $P$ , on définit un sous-domaine  $\Omega_P$  regroupant tous les éléments touchant ce sommet. On construit sur ce domaine un polynôme  $\tilde{Q}$  de degré supérieur au degré d'interpolation de la solution éléments finis  $Q_h$  et minimisant l'intégrale :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_P} (\tilde{Q} - Q_h)^2 d\Omega_P$$

Une fois ce polynôme construit, l'erreur estimée sur les différentes variables est donc :

$$||e^p|| = ||\tilde{p} - p_h||$$

$$||e^u|| = ||\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h||$$

$$||e^T|| = ||\tilde{T} - T_h||$$

c'est-à-dire :

– pression :

$$||e^p|| = \left[ \int_{\Omega} (\nabla \tilde{p} - \nabla p_h) \cdot (\nabla \tilde{p} - \nabla p_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

– vitesse :

$$\|e^u\| = \left[ \int_{\Omega} (\tilde{\epsilon} - \epsilon_h) : (\tilde{\epsilon} - \epsilon_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

– température :

$$\|e^T\| = \left[ \int_{\Omega} (\nabla \tilde{T} - \nabla T_h) \cdot (\nabla \tilde{T} - \nabla T_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

On sait que la norme de l'erreur  $\|e\|$  est proportionnelle à une puissance  $\alpha$  de la taille  $h$  des éléments :

$$\|e\| = ch^\alpha$$

En utilisant l'élément de Taylor-Hood, la vitesse et la température sont quadratiques et la pression linéaire. Avec notre choix de norme pour chaque variable, nous allons donc observer une convergence quadratique ( $\alpha = 2$ ) pour la vitesse et la température, et une convergence linéaire ( $\alpha = 1$ ) pour la pression.

### 3.4 Adaptation

Nous avons maintenant une estimation de l'erreur partout dans le domaine. Notre prochaine étape est, à l'aide de cet estimé, de construire un maillage amélioré, ceci afin de réduire l'erreur globale.

Commençons par ne considérer qu'une seule variable, par exemple la vitesse. L'erreur globale  $\|e\|_{\Omega}$  est reliée à l'erreur élémentaire  $\|e\|_K$  par la relation :

$$\|e\|_{\Omega}^2 = \sum_{K=1}^{n_{elem}} \|e\|_K^2 \quad (3.10)$$

où  $n_{elem}$  est le nombre d'éléments du maillage courant.

On se fixe comme objectif de réduire l'erreur d'un facteur  $\xi$ , c'est-à-dire :

$$||e_{cible}||_{\Omega}^2 = \xi ||e||_{\Omega}^2 \quad (3.11)$$

Par soucis d'optimalité, nous voulons également répartir l'erreur de manière équitable entre les éléments. L'erreur élémentaire cible est donc :

$$||e_{cible}||_K = \frac{||e_{cible}||_{\Omega}}{\sqrt{n_{elem}}} \quad (3.12)$$

La relation reliant l'erreur élémentaire à la taille de l'élément a été écrite dans la section précédente. Ainsi, sur le maillage courant, nous avons :

$$||e||_K = ch_K^{\alpha} \quad (3.13)$$

Et nous voulons sur le maillage cible :

$$||e_{cible}||_K = c\delta_K^{\alpha} \quad (3.14)$$

où  $\delta_K$  est la taille que devront avoir les éléments situés dans la zone de l'élément courant  $K$ . En combinant les équations (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14), on obtient l'expression suivante pour  $\delta_K$  :

$$\delta_K = \left( \frac{\xi ||e||_{\Omega}}{||e||_K \sqrt{n_{elem}}} \right)^{1/\alpha} h_K \quad (3.15)$$

Le travail effectué ci-dessus ne concerne qu'une seule norme de l'erreur. Or plusieurs variables sont importantes pour la résolution d'un écoulement et éventuellement

de ses sensibilités. Il faut donc adapter le maillage en utilisant plusieurs normes (et donc plusieurs variables). En effet, un maillage bien adapté au champ de vitesse ne l'est pas forcément pour le champ de pression par exemple. On désire donc contrôler la précision numérique de plusieurs variables simultanément.

Nous avons choisi de calculer séparément les tailles élémentaires pour chaque variable incluse dans les calculs. Ainsi sur l'élément  $K$ , nous allons récupérer plusieurs tailles élémentaires, chacune correspondant à une variable :  $\delta_K^u, \delta_K^p, \delta_K^T$ , ainsi que toutes celles correspondant aux sensibilités :  $\delta_K^{s_u^i}, \delta_K^{s_p^i}, \delta_K^{s_T^i}$ , avec  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  étant le nombre de sensibilités considérées.

Parmi toutes ces tailles élémentaires, on choisit celle qui est la plus restrictive :

$$\delta_K = \min(\delta_K^u, \delta_K^p, \delta_K^T, \dots, \delta_K^{s_u^i}, \delta_K^{s_p^i}, \delta_K^{s_T^i}, \dots) \quad (3.16)$$

Le maillage ainsi obtenu résulte donc d'une combinaison des exigences des différentes variables d'écoulement et des sensibilités. Le principe d'équirépartition de l'erreur se trouve affecté par l'application du minimum sur plusieurs distributions, mais il est impossible d'équirépartir l'erreur selon chacune des variables. Le plus important est que, par ce principe, on arrive à contrôler la qualité de la solution pour toutes les variables.

## CHAPITRE 4

### VÉRIFICATION

Dans ce chapitre, nous allons vérifier la bonne implémentation de la formulation proposée dans les chapitres précédents. Nous allons tout d'abord décrire la méthode employée, dite *des solutions manufacturées*. Ensuite, nous utiliserons cette méthode dans deux exemples : l'un en 2D cartésien, l'autre en axisymétrique.

#### 4.1 Méthode des solutions manufacturées

La méthode des solutions manufacturées consiste à comparer une solution analytique d'un problème que l'on connaît à la solution numérique calculée par le code de calcul. Elle permet ainsi de vérifier la formulation des équations discrétisées et la précision de la procédure de résolution.

On s'attend tout d'abord à ce que la solution numérique se rapproche de la solution analytique. De plus, afin de vérifier notre estimation d'erreur, il est important de comparer l'erreur exacte (écart entre la solution exacte et la solution calculée) et l'erreur estimée (dont la description est donnée à la fin du chapitre précédent). Ces deux erreurs sont supposées tendre l'une vers l'autre à mesure que le nombre de nœuds augmente. Enfin, il convient de vérifier que ces erreurs convergent avec des taux proches de ceux prédits par les considérations théoriques.

Le principe de la méthode des solutions manufacturées est le suivant. On choisit tout d'abord une solution analytique. Ensuite, on rajoute des termes sources dans les équations afin que la solution satisfasse ce système d'équations. Enfin, on fait

une étude de raffinement de maillage afin d'analyser la convergence des calculs.

Dans notre code, nous pouvons rajouter des termes sources dans les équations de mouvement et d'énergie. Il convient donc de prendre une solution analytique satisfaisant l'équation de continuité ( $\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0$ ). Les termes sources nécessaires pour que cette solution satisfasse les équations restantes sont ensuite rajoutés.

Ajoutons enfin que cette méthode, initialement proposée par Steinberg et Roache <sup>[25]</sup> et développée par Pelletier et Roache <sup>[21]</sup>, bien que très simple, reste cependant très précise.

## 4.2 Couche limite bidimensionnelle compressible

Cet exemple a été étudié par Ilinca et Pelletier <sup>[11]</sup>. Il présente les caractéristiques d'un écoulement de couche limite autour d'une plaque plane isotherme.

### 4.2.1 Description du problème

La solution sous forme adimensionnelle est définie par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 p &= 0 \\
 T &= \frac{\gamma_r - 1}{2} M_r^2 \left[ 1 - \left( 1 - e^{-(y/\delta)} \right)^2 \right] \\
 \rho &= \frac{1}{T + 1} \\
 u &= \frac{1 - e^{-(y/\delta)}}{\rho} \\
 v &= \frac{\frac{\delta}{2x} \left[ 1 - e^{-(y/\delta)} \left( 1 + \frac{y}{\delta} \right) \right]}{\rho}
 \end{aligned}$$

où  $\delta = \sqrt{\frac{x}{Re}}$ .



Les calculs sont effectués avec de l'air ( $\gamma_r = 1.4$ ) pour un nombre de Reynolds  $Re = 1000$ , un nombre de Prandtl  $Pr = 0.7$ , un nombre de Mach  $M_r = 0.7$ . Le domaine de calcul est le rectangle  $[0.2; 1.0] \times [0.0; 1.0]$ .

Les termes sources ajoutés dans l'équation de mouvement sont :

$$\mathbf{f} = \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \quad (4.1)$$

et dans l'équation d'énergie :

$$q = \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (4.2)$$

On pourra trouver en annexe la description exacte de ses termes en coordonnées cartésiennes.

La géométrie et les conditions aux limites sont résumées sur la figure 4.1. Pour fixer la pression, on applique une condition de Neumann sur la frontière droite du domaine.

On calcule également les sensibilités par rapport au nombre de Mach  $M_r$ . Ceci permet de traiter un cas assez général où les sensibilités de vitesse, température et masse volumique sont non nulles. Celles-ci sont :

$$\begin{aligned} s_p^{M_r} &= 0 \\ s_T^{M_r} &= (\gamma_r - 1) M_r \left[ 1 - (1 - e^{-(y/\delta)})^2 \right] \\ \rho'_{M_r} &= -\frac{s_T^{M_r}}{(T + 1)^2} \\ s_u^{M_r} &= -(1 - e^{-(y/\delta)}) \frac{\rho'_{M_r}}{\rho^2} \\ s_v^{M_r} &= -\frac{\delta}{2x} \left[ 1 - e^{-(y/\delta)} \left( 1 + \frac{y}{\delta} \right) \right] \frac{\rho'_{M_r}}{\rho^2} \end{aligned}$$

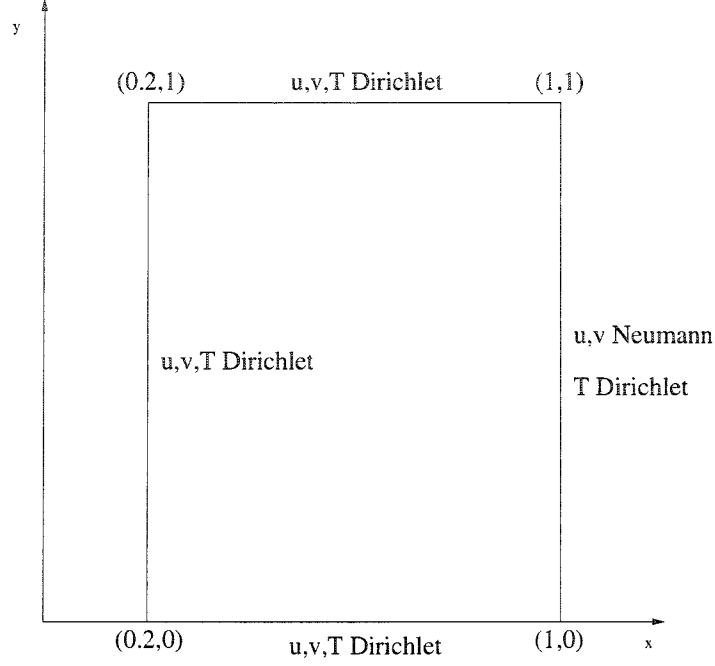


FIG. 4.1 Géométrie et conditions aux limites

Les termes sources ajoutés dans l'équation de mouvement des sensibilités sont obtenus par différentiation de l'expression (4.1) :

$$\begin{aligned} s_f = & \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho (\mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) + \nabla s_p \\ & - \nabla \cdot \left[ \mu' (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \mu (\nabla \mathbf{s}_u + \nabla \mathbf{s}_u^T) - \frac{2}{3} \mu' \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{s}_u \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

et pour l'équation d'énergie, après différentiation de l'expression (4.2), on obtient :

$$\begin{aligned} s_q = & (\rho' c_p + \rho c_p') \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) \\ & - r'_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p - r_{cw} (\mathbf{s}_u \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla s_p) - \nabla \cdot (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le lecteur trouvera en annexe le détail de chaque terme.

### 4.2.2 Étude de la convergence de la solution

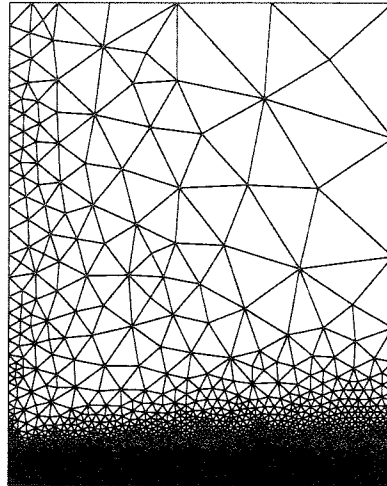


FIG. 4.2 Maillage final pour la couche limite

La figure 4.2 montre le maillage final comportant 44228 nœuds, obtenu après 8 cycles d'adaptation. L'adaptation au cours des cycles se fait sur l'écoulement et les sensibilités. Afin de tester notre code, nous allons vérifier les trois points suivants lors de notre analyse de convergence :

- la précision de la solution éléments finis,
- la bonne adaptation du maillage,
- la précision de l'estimateur d'erreur.

### 4.2.2.1 Écoulement

Intéressons nous d'abord à l'écoulement, avant de passer aux sensibilités. L'évolution des erreurs exactes et estimées est présentée sur le tableau 4.1 et graphiquement sur la figure 4.3.

TAB. 4.1 Erreurs exacte et estimée pour l'écoulement

Nodes	$\ u\ _{exa.}$	$\ u\ _{est.}$	$\ T\ _{exa.}$	$\ T\ _{est.}$	$\ p\ _{exa.}$	$\ p\ _{est.}$
58	4.385E-03	6.972E-04	2.883E-04	9.753E-05	3.260E-01	1.057E-01
123	2.948E-03	7.969E-04	1.968E-04	9.220E-05	1.804E-01	6.044E-02
254	1.276E-03	6.559E-04	1.525E-04	8.705E-05	6.390E-02	1.814E-02
506	3.851E-04	3.263E-04	7.798E-05	5.119E-05	2.056E-02	7.875E-03
1087	1.231E-04	1.214E-04	3.160E-05	2.487E-05	4.345E-03	1.678E-03
2690	4.093E-05	4.352E-05	9.749E-06	8.938E-06	1.624E-03	7.403E-04
6914	1.512E-05	1.542E-05	3.053E-06	2.931E-06	9.353E-04	4.949E-04
17476	5.878E-06	5.979E-06	1.159E-06	1.150E-06	5.112E-04	2.861E-04
44228	2.246E-06	2.283E-06	4.424E-07	4.423E-07	2.775E-04	1.620E-04

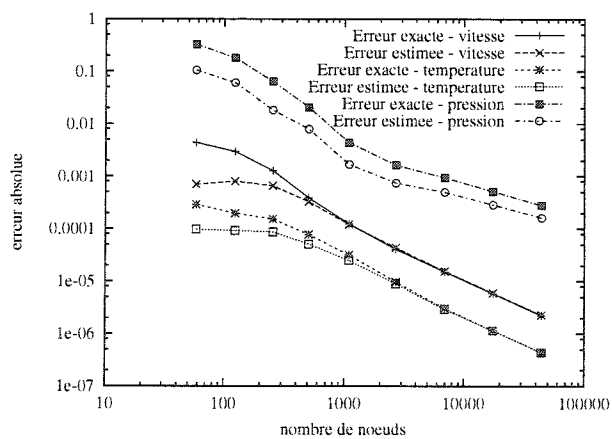


FIG. 4.3 Courbe de convergence pour l'écoulement

Toutes les erreurs (vitesse, pression et température) décroissent de façon régulière pour atteindre des valeurs très faibles (autour de  $10^{-6}$  pour la vitesse et la température).

La diminution de l'erreur exacte vers ces faibles valeurs démontre la bonne convergence de la solution numérique vers la solution exacte.

La courbe d'estimation d'erreur se rapproche de plus en plus de la courbe d'erreur exacte à mesure que le nombre de nœuds augmente, prouvant ainsi l'exactitude asymptotique de l'estimateur. On peut néanmoins remarquer un écart entre les deux courbes d'erreur pour la pression. Ceci peut s'expliquer par le fait que la pression exacte est nulle dans tout le domaine. La pression trouvée numériquement correspond donc à l'erreur par rapport à la solution exacte. En projetant la solution numérique sur une autre base, un certain décalage apparaît donc dans le calcul de l'erreur.

La pente des droites correspond à l'ordre de convergence de chaque variable, puisque la figure est tracée en variables logarithmiques. Cette pente correspond à la moitié du coefficient de convergence  $\alpha$  utilisé dans le chapitre précédent. En effet, la courbe est tracée en fonction du nombre de nœuds, et on peut montrer que celui-ci se comporte comme le carré de l'inverse de la taille des éléments. On a donc :

$$||e|| = c_1 h^\alpha = c_2 \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \right)^\alpha = c_2 \frac{1}{N^{\alpha/2}} \quad (4.5)$$

Ainsi, nous nous attendons à avoir une pente de 1 pour la vitesse et la température (puisque pour ces variables  $\alpha = 2$ ), et une pente de 0.5 pour la pression. L'information du tableau 4.1 permet de calculer des pentes de 1.05, 1.10 et 0.63 respectivement pour la vitesse, la température et la pression. On observe donc asymptotiquement les taux de convergence prédits par la théorie :  $O(h^2)$  pour la vitesse et la température, et  $O(h)$  pour la pression.

Ces résultats permettent donc de vérifier le bon comportement du code dans la

résolution des équations pour l'écoulement. Il reste encore à faire la même chose pour les sensibilités.

#### 4.2.2.2 Sensibilités

Les résultats de convergence pour les sensibilités sont rassemblés sur le tableau 4.2 et sont représentés graphiquement sur la figure 4.4.

Il nous faut vérifier les mêmes points que pour l'écoulement, à savoir la bonne convergence de la solution numérique vers la solution exacte, le bon comportement de l'estimateur et des taux de convergence asymptotiques en accord avec la théorie.

Chacune des erreurs descend vers des valeurs faibles. De plus, les courbes d'erreur exacte et estimée se rapprochent au cours des cycles, jusqu'à être pratiquement confondues (sauf pour la pression, mais ceci s'explique encore par le fait que la sensibilité en pression est nulle). Enfin, les pentes des différentes droites sont environ 1.01, 1.06 et 0.71 pour la vitesse, la température et la pression respectivement. Ceci correspond bien aux taux de convergence attendus : quadratique pour la vitesse et la pression ( $\alpha = 2$ ) et linéaire pour la pression ( $\alpha = 1$ ).

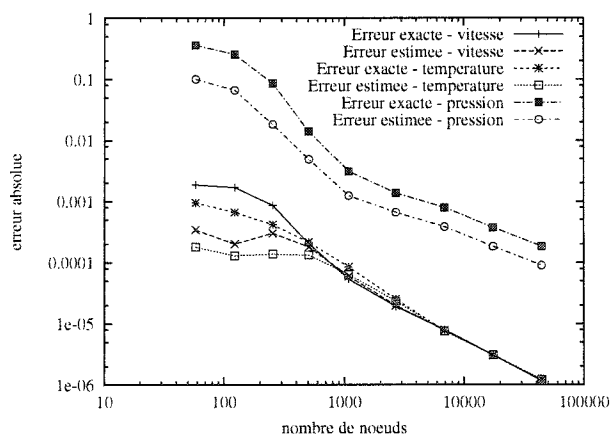
Ceci conclue donc notre vérification sur des écoulements bidimensionnels cartésiens. Il reste cependant à vérifier le code pour des écoulements axisymétriques.

### 4.3 Jet axisymétrique impactant sur une plaque plane

Nous reprenons ici un problème présenté par Turgeon *et al* <sup>[30]</sup>. La solution représente un jet compressible impactant sur une plaque plane. La géométrie du problème est présentée sur la figure 4.5.

TAB. 4.2 Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à  $M_r$ 

Nodes	$\ s_u\ _{exa.}$	$\ s_u\ _{est.}$	$\ s_T\ _{exa.}$	$\ s_T\ _{est.}$	$\ s_p\ _{exa.}$	$\ s_p\ _{est.}$
58	1.870E-03	3.455E-04	9.573E-04	1.811E-04	3.618E-01	1.005E-01
123	1.692E-03	2.017E-04	6.651E-04	1.303E-04	2.545E-01	6.617E-02
254	8.691E-04	3.030E-04	4.196E-04	1.378E-04	8.562E-02	1.835E-02
506	2.044E-04	1.810E-04	2.160E-04	1.331E-04	1.406E-02	4.923E-03
1087	5.370E-05	5.993E-05	8.460E-05	6.401E-05	3.107E-03	1.241E-03
2690	1.913E-05	1.971E-05	2.524E-05	2.336E-05	1.373E-03	6.647E-04
6914	8.013E-06	7.898E-06	7.750E-06	7.568E-06	7.994E-04	3.866E-04
17476	3.063E-06	3.049E-06	3.055E-06	3.080E-06	3.758E-04	1.844E-04
44228	1.165E-06	1.159E-06	1.207E-06	1.218E-06	1.848E-04	9.013E-05

FIG. 4.4 Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à  $M_r$ 

#### 4.3.1 Description du problème

La solution adimensionalisée utilisée est la suivante :

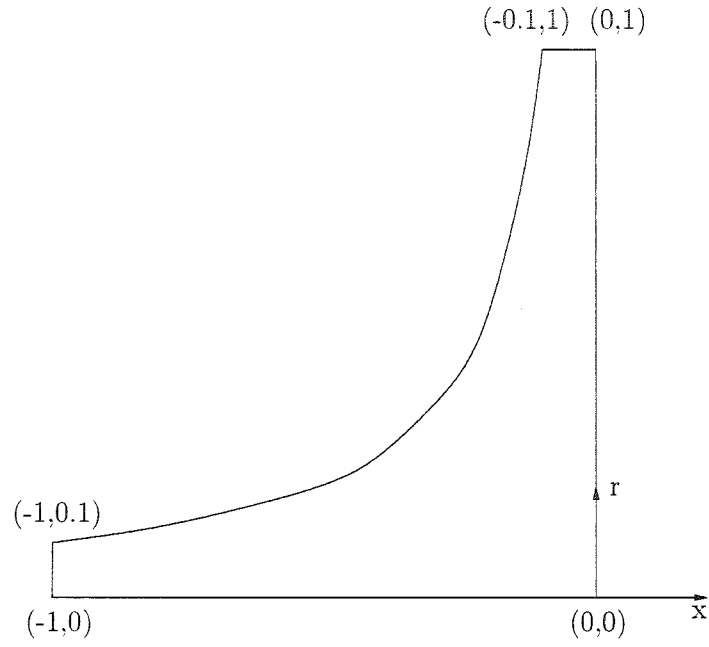


FIG. 4.5 Géométrie du jet axisymétrique

$$p = e^{-A_p(x^2+r^2)}$$

$$T = e^{\frac{A_T x}{1+4r^2}}$$

$$\rho = \frac{\gamma_r M_r^2 p + 1}{\frac{T_s}{T_r} T + 1}$$

$$u = A_u \frac{x^2(e^{-x^2 r^2} - e^{-0.01})}{\rho}$$

$$v = -A_u \frac{x r (e^{-x^2 r^2} - e^{-0.01})}{\rho}$$

Dans ce problème, les propriétés physiques dépendent de la température et sont



données par les expressions suivantes tirées de Aihara *et al.* <sup>[1]</sup> pour de l'air :

$$\begin{aligned}\mu &= \left( \frac{T_s}{T_r} T + 1 \right)^{0.68} \\ c_p &= \left( \frac{T_s}{T_r} T + 1 \right)^{0.05} \\ \lambda &= \left( \frac{T_s}{T_r} T + 1 \right)^{0.76}\end{aligned}$$

On emploie les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{array}{lll} A_p = 400 & A_T = 200 & A_u = 100 \\ Re = 100 & Pr = 0.7 & M_r = 0.7 \\ \gamma_r = 1.4 & \frac{T_s}{T_r} = 1 & \end{array}$$

Nous utilisons des conditions de Dirichlet sur toutes les frontières sauf en entrée et sur la partie supérieure du domaine où des conditions de Neumann sont utilisées pour la vitesse, ceci afin de fixer la pression.

Les termes sources dans les équations de mouvement et d'énergie sont également données par les expressions (4.1) et (4.2). Le détail des termes en coordonnées axisymétriques se situe en annexe.

Nous avons décidé ici de nous intéresser aux sensibilités par rapport aux paramètres  $A_u$ ,  $A_T$ , et  $A_p$ . Ceci permet en effet de couvrir plusieurs cas. En effet, dans un cas, seule la vitesse est affectée par les sensibilités, et dans les autres, c'est la pression ou la température qui sont affectées, mais cela se transmet à la vitesse par l'intermédiaire de  $\rho$ .

Les expressions des sensibilités sont les suivantes :

– Sensibilités par rapport à  $A_u$

$$\begin{aligned}
 s_p^{A_u} &= 0 \\
 s_T^{A_u} &= 0 \\
 \rho'_{A_u} &= 0 \\
 s_u^{A_u} &= \frac{x^2(e^{-x^2r^2} - e^{-0.01})}{\rho} \\
 s_v^{A_u} &= -\frac{xr(e^{-x^2r^2} - e^{-0.01})}{\rho}
 \end{aligned}$$

– Sensibilités par rapport à  $A_T$

$$\begin{aligned}
 s_p^{A_T} &= 0 \\
 s_T^{A_T} &= \frac{x}{1+4r^2} e^{\frac{A_T x}{1+4r^2}} \\
 \rho'_{A_T} &= -\frac{(\gamma_r M_r^2 p + 1) \frac{T_s}{T_r} s_T^{A_T}}{\left(\frac{T_s}{T_r} T + 1\right)^2} \\
 s_u^{A_T} &= -A_u x^2 (e^{-x^2r^2} - e^{-0.01}) \frac{\rho'_{A_T}}{\rho^2} \\
 s_v^{A_T} &= A_u x r (e^{-x^2r^2} - e^{-0.01}) \frac{\rho'_{A_T}}{\rho^2}
 \end{aligned}$$

– Sensibilités par rapport à  $A_p$

$$\begin{aligned}
 s_p^{A_p} &= -(x^2 + r^2) e^{-A_p(x^2+r^2)} \\
 s_T^{A_p} &= 0 \\
 \rho'_{A_p} &= \frac{\gamma_r M_r^2 s_p^{A_p}}{\frac{T_s}{T_r} T + 1} \\
 s_u^{A_p} &= -A_u x^2 (e^{-x^2r^2} - e^{-0.01}) \frac{\rho'_{A_p}}{\rho^2} \\
 s_v^{A_p} &= A_u x r (e^{-x^2r^2} - e^{-0.01}) \frac{\rho'_{A_p}}{\rho^2}
 \end{aligned}$$

Notons que les sensibilités des propriétés physiques de l'écoulement peuvent être non nulles et s'écrivent dans tous les cas :

$$\begin{aligned}\mu' &= 0.68 \frac{T_s}{T_r} s_T \left( \frac{T_s}{T_r} T + 1 \right)^{(0.68-1)} \\ c_p' &= 0.05 \frac{T_s}{T_r} s_T \left( \frac{T_s}{T_r} T + 1 \right)^{(0.05-1)} \\ \lambda' &= 0.76 \frac{T_s}{T_r} s_T \left( \frac{T_s}{T_r} T + 1 \right)^{(0.76-1)}\end{aligned}$$

On pourra trouver en annexe l'expression exacte des termes sources (4.3) et (4.4) pour les sensibilités en coordonnées axisymétriques.

#### 4.3.2 Étude de la convergence de la solution

Ici encore, nous allons étudier la convergence de la solution afin de vérifier, tout comme pour la solution manufacturée précédente, que le code se comporte normalement.

Le maillage final est celui de la figure 4.6. Il comprend 78833 nœuds, et a été obtenu après 5 cycles d'adaptation. Notons que nous utilisons une norme cartésienne pour l'erreur, et non une norme axisymétrique. Pour des problèmes axisymétriques, la norme usuelle employée est :

$$\int \cdot r \, dr \, dx$$

Comme précisé par Turgeon et Pelletier <sup>[29]</sup>, la présence du  $r$  dans l'intégrale tend à réduire le poids de l'erreur près de l'axe. Afin de garder une bonne répartition de l'erreur de manière uniforme partout dans le domaine, nous utilisons une norme cartésienne (sans le  $r$ ).

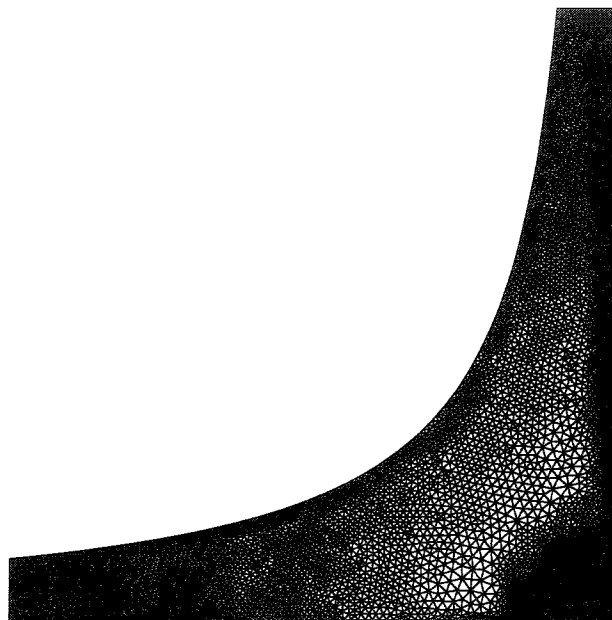


FIG. 4.6 Maillage final pour le jet impactant

#### 4.3.2.1 Écoulement

Les erreurs exactes et estimées pour l'écoulement sont répertoriées sur le tableau 4.3 et la figure 4.7.

Les erreurs diminuent progressivement avec le raffinement du maillage. Pour les trois variables, les courbes d'erreurs exactes et estimées sont pratiquement superposées au bout de nos 5 cycles d'adaptation (on peut remarquer que l'écart entre certaines courbes observé précédemment a disparu, puisqu'aucune variable n'a de

champ exact nul). Enfin, les taux de convergence sont bien ceux attendus par la théorie :  $O(h)$  pour la pression et  $O(h^2)$  pour la température et la vitesse.

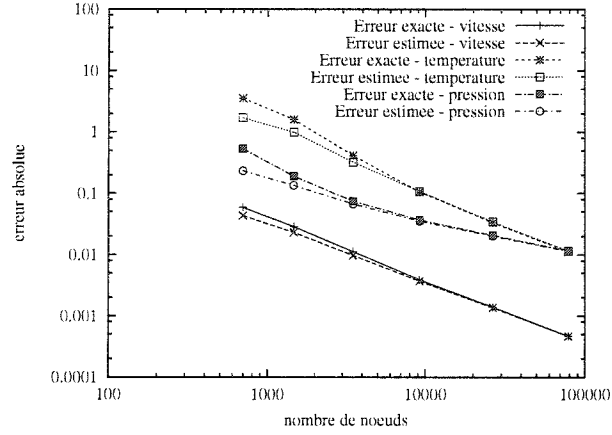


FIG. 4.7 Courbe de convergence pour l'écoulement

TAB. 4.3 Erreurs exacte et estimée pour l'écoulement

Nodes	$\ u\ _{exa.}$	$\ u\ _{est.}$	$\ T\ _{exa.}$	$\ T\ _{est.}$	$\ p\ _{exa.}$	$\ p\ _{est.}$
696	5.905E-02	4.333E-02	3.550E+00	1.701E+00	5.346E-01	2.331E-01
1467	2.878E-02	2.315E-02	1.598E+00	9.914E-01	1.922E-01	1.355E-01
3493	1.124E-02	9.709E-03	4.127E-01	3.241E-01	7.412E-02	6.721E-02
9207	3.911E-03	3.708E-03	1.059E-01	1.075E-01	3.677E-02	3.533E-02
26510	1.395E-03	1.369E-03	3.306E-02	3.419E-02	2.063E-02	2.008E-02
78833	4.652E-04	4.620E-04	1.119E-02	1.152E-02	1.157E-02	1.139E-02

#### 4.3.2.2 Sensibilités

On peut observer les résultats des calculs des sensibilités par rapport à  $A_u$ ,  $A_p$  et  $A_T$  sur les tableaux 4.4, 4.5 et 4.6 et sur les figures 4.8, 4.9 et 4.10.

On peut voir que toutes les erreurs diminuent correctement. Mis à part les champs

de sensibilités qui sont nuls ( $s_p^{A_u}$ ,  $s_T^{A_u}$ ,  $s_T^{A_p}$  et  $s_p^{A_T}$ ), les courbes d'estimation d'erreur rejoignent les courbes d'erreur exacte. Les pentes des droites sont également proches de l'étude théorique et confirment le fait qu'avec notre élément de Taylor-Hound, la vitesse et la température convergent quadratiquement et la pression linéairement.

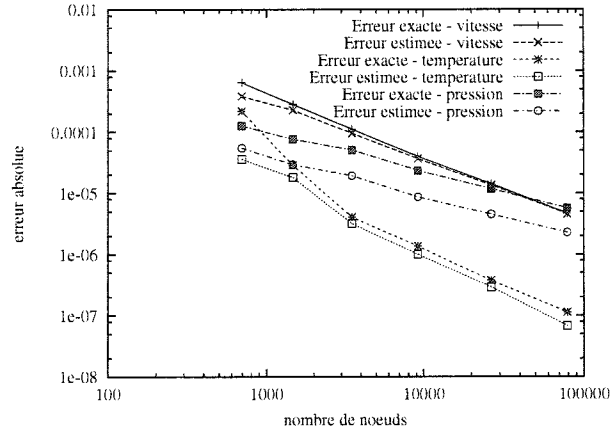
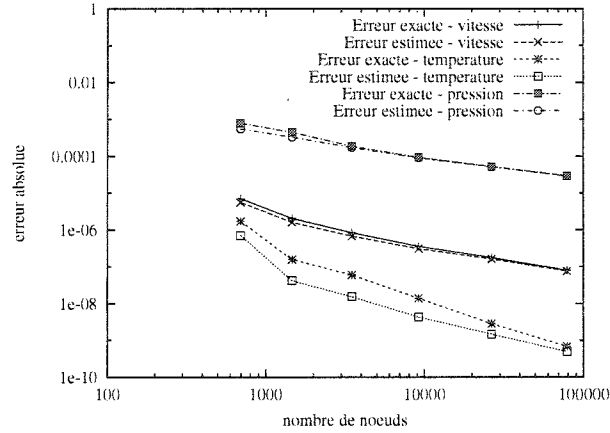


FIG. 4.8 Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à  $A_u$

TAB. 4.4 Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à  $A_u$

Nodes	$\ s_u^{A_u}\ _{exa.}$	$\ s_u^{A_u}\ _{est.}$	$\ s_T^{A_u}\ _{exa.}$	$\ s_T^{A_u}\ _{est.}$	$\ s_p^{A_u}\ _{exa.}$	$\ s_p^{A_u}\ _{est.}$
696	6.404E-04	3.839E-04	2.195E-04	3.597E-05	1.272E-04	5.505E-05
1467	2.841E-04	2.284E-04	2.895E-05	1.815E-05	7.649E-05	2.935E-05
3493	1.122E-04	9.605E-05	4.081E-06	3.209E-06	5.134E-05	1.933E-05
9207	3.976E-05	3.665E-05	1.362E-06	1.006E-06	2.345E-05	8.690E-06
26510	1.421E-05	1.351E-05	3.754E-07	2.921E-07	1.182E-05	4.546E-06
78833	4.660E-06	4.583E-06	1.134E-07	6.791E-08	5.723E-06	2.286E-06

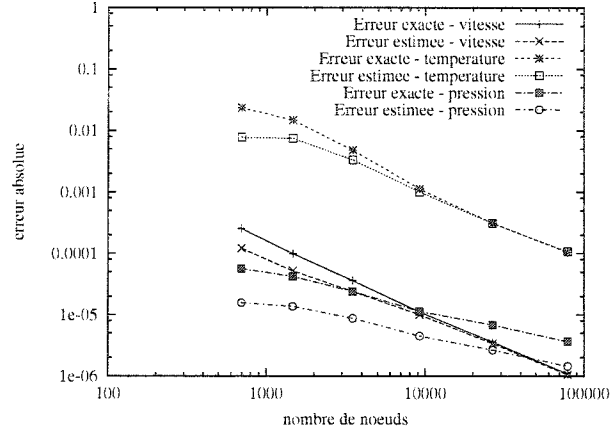
FIG. 4.9 Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à  $A_p$ TAB. 4.5 Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à  $A_p$ 

Nodes	$\ s_{\mathbf{u}}^{A_p}\ _{exa.}$	$\ s_{\mathbf{u}}^{A_p}\ _{est.}$	$\ s_T^{A_p}\ _{exa.}$	$\ s_T^{A_p}\ _{est.}$	$\ s_p^{A_p}\ _{exa.}$	$\ s_p^{A_p}\ _{est.}$
696	7.052E-06	5.571E-06	1.706E-06	7.000E-07	7.827E-04	5.506E-04
1467	2.059E-06	1.613E-06	1.565E-07	4.197E-08	4.458E-04	3.301E-04
3493	8.306E-07	6.741E-07	5.953E-08	1.530E-08	1.876E-04	1.717E-04
9207	3.543E-07	3.067E-07	1.390E-08	4.273E-09	9.276E-05	8.987E-05
26510	1.748E-07	1.608E-07	2.833E-09	1.458E-09	5.254E-05	5.131E-05
78833	8.000E-08	7.628E-08	6.834E-10	4.932E-10	2.940E-05	2.899E-05

#### 4.4 Conclusion

Ces deux solutions manufacturées nous ont permis de montrer que le code de calcul utilisé produit des solutions numériques dont la précision est conforme à la théorie. Nous avons aussi pu voir que l'adaptation du maillage se faisait de manière correcte : elle réduit l'erreur et produit des estimés asymptotiquement exacts.

Nous pouvons donc nous intéresser à des cas d'application, tout en sachant que

FIG. 4.10 Courbe de convergence pour la sensibilité par rapport à  $A_T$ TAB. 4.6 Erreurs exacte et estimée pour les sensibilités par rapport à  $A_T$ 

Nodes	$\ s_u^{A_t}\ _{exa.}$	$\ s_u^{A_t}\ _{est.}$	$\ s_T^{A_t}\ _{exa.}$	$\ s_T^{A_t}\ _{est.}$	$\ s_p^{A_t}\ _{exa.}$	$\ s_p^{A_t}\ _{est.}$
696	2.534E-04	1.209E-04	2.345E-02	7.746E-03	5.632E-05	1.570E-05
1467	9.879E-05	5.191E-05	1.473E-02	7.442E-03	4.207E-05	1.364E-05
3493	3.595E-05	2.403E-05	4.768E-03	3.325E-03	2.403E-05	8.712E-06
9207	1.105E-05	9.960E-06	1.121E-03	1.003E-03	1.134E-05	4.489E-06
26510	3.585E-06	3.399E-06	3.089E-04	3.076E-04	6.810E-06	2.658E-06
78833	1.090E-06	1.055E-06	1.049E-04	1.067E-04	3.653E-06	1.449E-06

notre solveur est fiable et précis.



## CHAPITRE 5

### APPLICATION AU NACA0012

Dans ce chapitre, nous appliquerons notre méthodologie à l'écoulement autour d'un profil d'aile NACA0012. Nous allons tout d'abord valider le code de calcul. Pour cela, nous nous appuierons sur des données expérimentales que nous disposons : la distribution du coefficient de pression le long du profil. Ensuite, nous pourrons enfin mettre en application différentes utilisations des sensibilités.

#### 5.1 Description du problème

Notre problème est formulé de manière adimensionnelle. On prend la corde du profil NACA0012 comme longueur de référence et elle est donc unitaire dans nos calculs. Le domaine de calcul considéré est le rectangle  $[-4; 4] \times [-5; 5]$ . L'origine du système de coordonnées est prise sur le bord d'attaque. Les variations de l'angle d'attaque  $\alpha$  sont obtenues en modifiant l'angle de l'écoulement incident. De cette manière, le repère et le profil sont fixes et l'angle  $\alpha$  peut être considéré comme paramètre de valeur.

La vitesse en amont est donc choisie de manière suivante :

$$u = U_r \cos \alpha$$

$$v = U_r \sin \alpha$$

avec  $U_r = 1$ .

La vitesse est spécifiée en entrée et sur le bord inférieur du domaine (conditions de Dirichlet) et laissée libre en sortie et sur le bord supérieur (contraintes nulles). Le long du profil, on impose des conditions d'adhérence dans le cas visqueux, ou bien des conditions de non pénétration dans le cas non visqueux (on aura alors un nombre de Reynolds de l'ordre de  $10^6$ ). Par la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement à des cas où le nombre de Reynolds est proche de 2000 (cas visqueux).

La température est imposée nulle sur les bords du domaine (le fluide est alors à température ambiante), alors qu'on spécifie un transfert de chaleur nul le long du profil (conditions de Neumann pour une paroi adiabatique).

Le fluide considéré est de l'air ( $\gamma_r = 1.4$ ). Les autres valeurs numériques nécessaires pour les calculs sont le nombre de Mach à l'infini  $M_r$ , le nombre de Reynolds  $Re$ , le nombre de Prandtl  $Pr$  et le coefficient  $\beta_r$ , que l'on établit à partir des relations isentropiques. Elles donnent le lien entre la température totale, la température au point courant et le nombre de Mach :

$$\frac{T_{Tot}}{T} = 1 + \frac{\gamma_r - 1}{2} M^2$$

Ainsi pour  $\beta_r = \frac{T_s}{T_r}$ , on utilise cette formule en prenant pour  $T_s$  la valeur de la température totale calculée à l'entrée du domaine de calcul, à l'aide des valeurs de référence. On a donc :

$$\beta_r = \frac{T_s}{T_r} = 1 + \frac{\gamma_r - 1}{2} M_r^2$$

Dans tous les calculs qui suivent, on prendra  $Pr = 0.7$ .

## 5.2 Validation

Cette étape est différente de la vérification effectuée dans le chapitre précédent. La vérification permet de mettre en avant un problème dans la résolution numérique des équations. On peut ainsi s'assurer que le code de calcul résout de manière convenable le système d'équations qui a été implanté. Par contre, rien lors de cette étape ne permet d'affirmer que, pour un problème donné, le code trouve des solutions physiquement acceptables, c'est-à-dire que le modèle implanté est physiquement réaliste.

C'est donc le rôle d'une deuxième étape, dite de validation. Nous allons ainsi comparer nos prédictions numériques à des mesures expérimentales <sup>[12]</sup>. Les données expérimentales dont nous disposons sont la distribution du coefficient de pression le long du profil.

Dans ce paragraphe, nous utilisons deux calculs. Le premier correspond à un nombre de Mach de 0.703, un angle d'attaque de -0.08 et un nombre de Reynolds de  $3.79 \times 10^6$ . Le deuxième calcul est effectué pour un nombre de Mach de 0.6, un angle d'attaque de 3.35 et un nombre de Reynolds de  $4.65 \times 10^6$ . La condition de non pénétration fait que nos calculs simulent un écoulement non-visqueux.

L'équation (2.1) donne le coefficient de pression, qui s'écrit à l'aide des variables adimensionnées :

$$C_p = 2p \tag{5.1}$$

Les figures 5.1 et 5.2 montrent la convergence du  $C_p$  au cours des cycles adaptatifs. On voit ainsi la convergence des calculs par rapport au maillage. On remarque qu'elle est plus rapide dans le cas où l'angle d'attaque est plus faible (-0.08 sur

la figure 5.1 par rapport à 3.35 sur la figure 5.2), puisque les gradients sont plus importants dans le deuxième cas. Dès le troisième cycle, sur la figure 5.1, la convergence semble atteinte, vu les faibles écarts entre deux cycles successifs. Sur la figure 5.2, il faut plus d'itérations (5 cycles) avant que les résultats ne soient convergés.

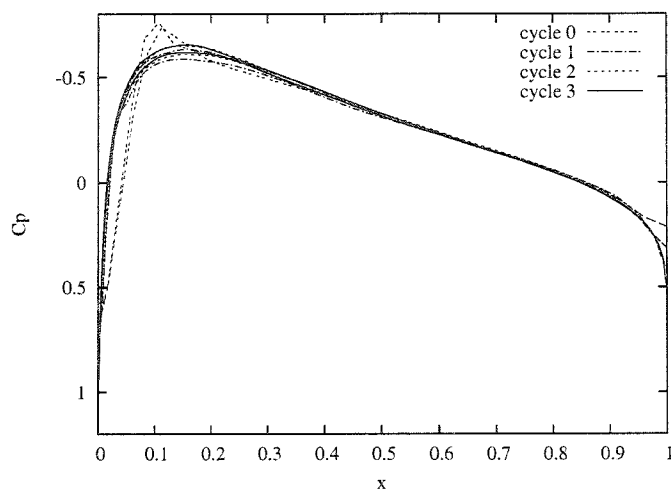


FIG. 5.1 Convergence du  $C_p$  au cours des cycles,  $M_r = 0.703$ ,  $\alpha = -0.08$

Les figures 5.3 et 5.4 représentent les comparaisons avec les données expérimentales. Les mesures expérimentales sont obtenues pour des angles d'attaque légèrement différents de ceux de nos calculs ( $-0.05$  pour le premier cas et  $3.94$  pour le deuxième). Cette différence entre la valeur de l'angle expérimental et numérique s'explique par l'utilisation de corrections pour l'interférence dues aux parois de la soufflerie. Elles fournissent la valeur corrigée de  $\alpha$  à utiliser pour les calculs.

On remarque quelques très légères différences entre le numérique et l'expérimental, qui pourraient s'expliquer par une certaine incertitude expérimentale, inhérente à toute manipulation humaine. Ces écarts sont minimes et correspondent à une différence inférieure à 5% sur les deux figures 5.3 et 5.4. On remarque aussi que les

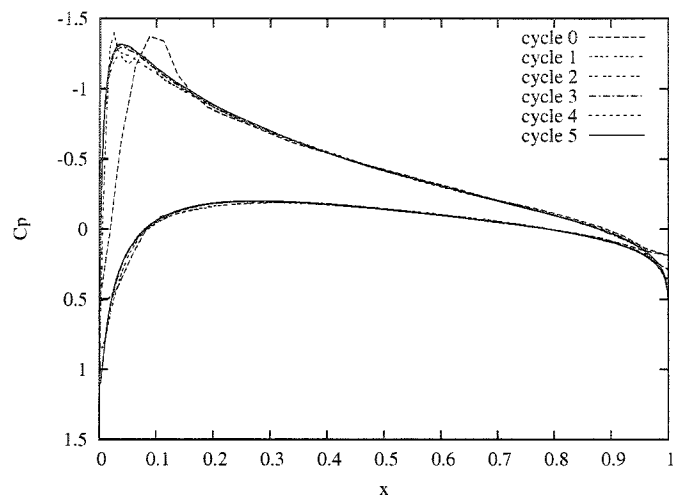


FIG. 5.2 Convergence du  $C_p$  au cours des cycles,  $M_r = 0.6$ ,  $\alpha = 3.35$

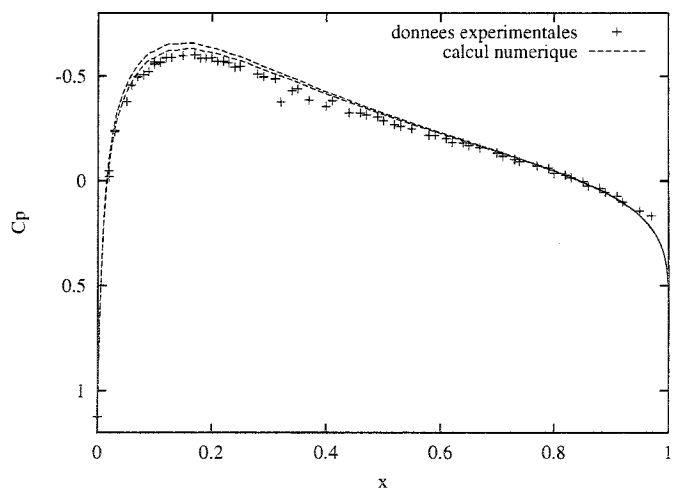


FIG. 5.3 Distribution du  $C_p$  pour  $\alpha = -0.08$ ,  $M_r = 0.703$ ,  $Re = 3.79 \times 10^6$

extrema se situent au même endroit, comme en témoigne le pic de dépression sur l'intrados de la figure 5.4.

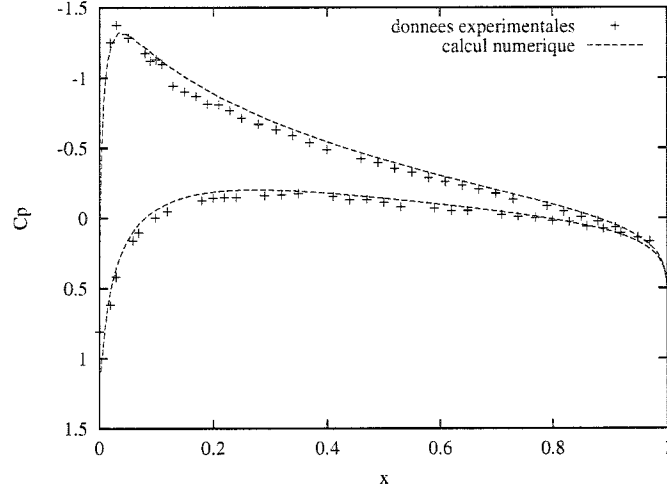


FIG. 5.4 Distribution du  $C_p$  pour  $\alpha = 3.35$ ,  $M_r = 0.6$ ,  $Re = 4.65 \times 10^6$

Pour finir cette validation, nous allons utiliser des résultats du régime incompressible, validé précédemment de nombreuses fois [15, 17, 18, 19], que nous allons relier à nos résultats numériques à l'aide d'une méthode de correction de compressibilité. On utilise généralement la formule de Prandtl-Glauert suivante, valide pour de petites valeurs du nombre de Mach :

$$C_p^c = \frac{C_p^{inc}}{\sqrt{1 - M_r^2}} \quad (5.2)$$

$C_p^{inc}$  et  $C_p^c$  sont les coefficients de pression des écoulements incompressible et compressible respectivement.

La figure 5.5 présente les résultats compressibles ( $M_r = 0.3$ ) en ligne pleine, ainsi que ceux extrapolés de l'incompressible à partir de la relation (5.2), en pointillé. L'agrandissement de la zone  $x \in [0; 0.3]$  sur la figure 5.6 permet de bien voir la superposition des deux courbes. Le léger écart que l'on remarque entre l'intrados et l'extrados d'une même courbe (malgré le fait que l'angle d'attaque soit nul)

provient du fait que le maillage n'est pas parfaitement symétrique. Ces écarts sont néanmoins minimes.

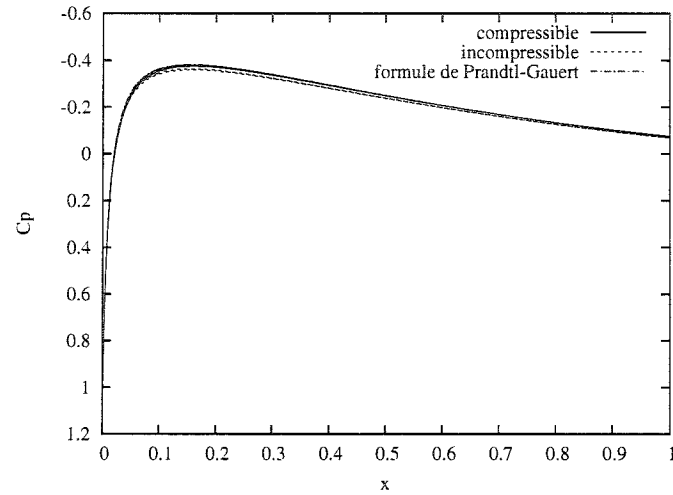


FIG. 5.5 Comparaison du  $C_p$  à l'aide de résultats incompressibles

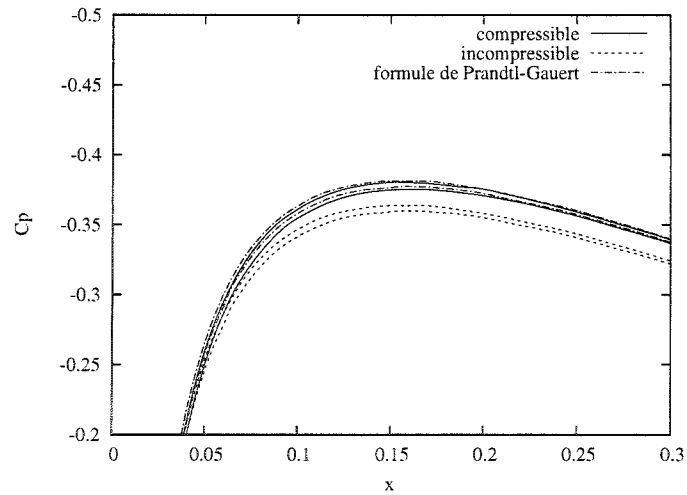


FIG. 5.6 Comparaison du  $C_p$  à l'aide de résultats incompressibles (agrandissement)

La validation du code ayant été correctement effectuée, nous allons considérer,

dans la suite de ce chapitre, trois paramètres pour notre étude de sensibilités :

- l’angle d’attaque  $\alpha$ ,
- le nombre de Mach à l’infini  $M_r$ ,
- le nombre de Reynolds  $Re$ .

### 5.3 Analyse de sensibilités

Les calculs suivants ont été effectués pour un angle d’attaque de 3 degrés, un nombre de Mach de 0.4 et un nombre de Reynolds de 2000. Les calculs tels que ceux-ci, à faible nombre de Reynolds, trouvent leurs applications dans l’exploration de planètes voisines (telles Mars), où la densité atmosphérique est très faible, ou encore dans la reconnaissance militaire, où des appareils de petites dimensions sont utilisés. Dans ces deux cas, le nombre de Reynolds est très faible.

Le maillage final type obtenu pour ce genre de calcul est représenté sur la figure 5.7 et comporte entre 90000 et 95000 nœuds, obtenu après 5 cycles d’adaptation.

#### 5.3.1 Écoulement

La figure 5.8 montre les isovaleurs de la vitesse horizontale  $u$ . On peut distinguer les différentes zones caractéristiques, à savoir la couche limite autour du profil (où les gradients sont les plus importants), et aussi la zone de recirculation sur l’extrados, du côté du bord de fuite. Le fluide est ralenti à l’approche du profil, et la vitesse est la plus faible dans la couche limite et dans le sillage de l’aile.

Les isobares sont tracées sur la figure 5.9. Celles-ci sont normales au profil. En effet, dans la couche limite, la pression est pratiquement constante dans la direction perpendiculaire au profil. Sur la majeure partie de celui-ci, la pression est négative,



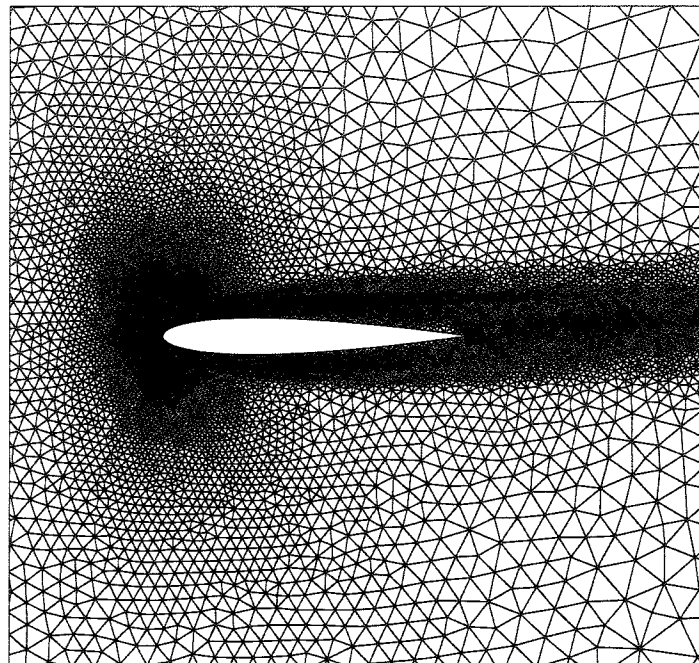


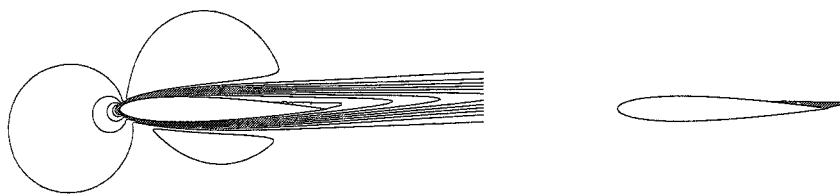
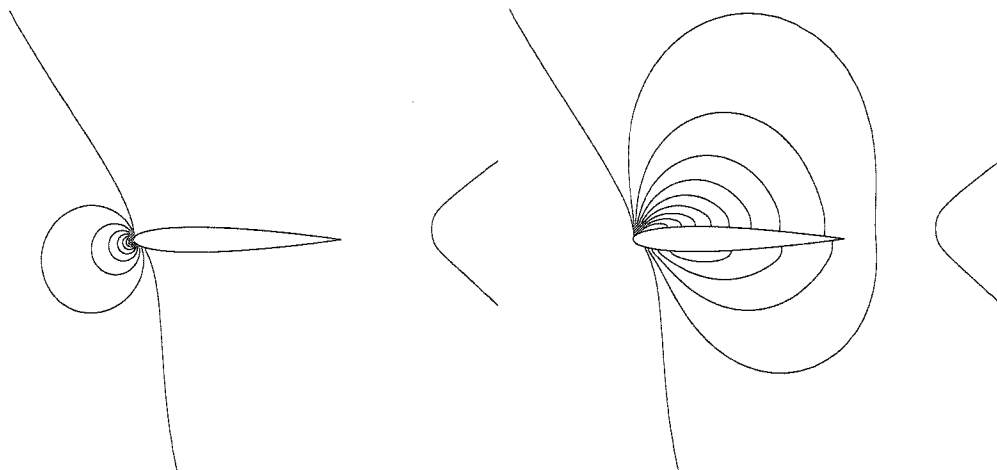
FIG. 5.7 Maillage final pour  $\alpha = 3$ ,  $M_r = 0.4$  et  $Re = 2000$

comme nous avons pu le voir sur les courbes de distribution du  $C_p$  (figures 5.3 et 5.4). Elle est cependant importante autour du point de stagnation, où elle est maximale. On remarque également une dissymétrie dans l'écoulement, qui provient du fait que l'angle d'attaque est non nul.

Dans la suite, les sensibilités vont nous permettre d'analyser le comportement du fluide face aux différents paramètres.

### 5.3.2 Sensibilités par rapport à $\alpha$

L'angle d'attaque  $\alpha$  est le premier paramètre que nous allons étudier. Il correspond plus exactement à l'angle d'incidence de l'écoulement.

(a) Isovaleurs positives de  $u$ (b) Isovaleurs négatives de  $u$ FIG. 5.8 Distribution de  $u$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$ (a) Isovaleurs positives de  $p$ (b) Isovaleurs négatives de  $p$ FIG. 5.9 Distribution de  $p$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$

La figure 5.10 montre les sensibilités de la vitesse  $u$  par rapport à  $\alpha$  :  $s_u^\alpha$ . Une augmentation de  $\alpha$  induit une accélération de l'écoulement sur l'intrados ( $s_u^\alpha$  positif) et un ralentissement sur l'extrados ( $s_u^\alpha$  négatif). Ceci provoquera donc un déplacement du point de décollement vers l'amont. Le point de stagnation, du côté du bord d'attaque, va être décalé vers le bas. En effet, sur le bord d'attaque, les sensibilités sont positives en haut, et négatives en bas, indiquant que, pour un angle  $\alpha$  plus important, le fluide sera accéléré au niveau et au-dessus du point de stagnation, et ralenti en dessous, indiquant qu'il va effectivement être déplacé sur l'intrados.

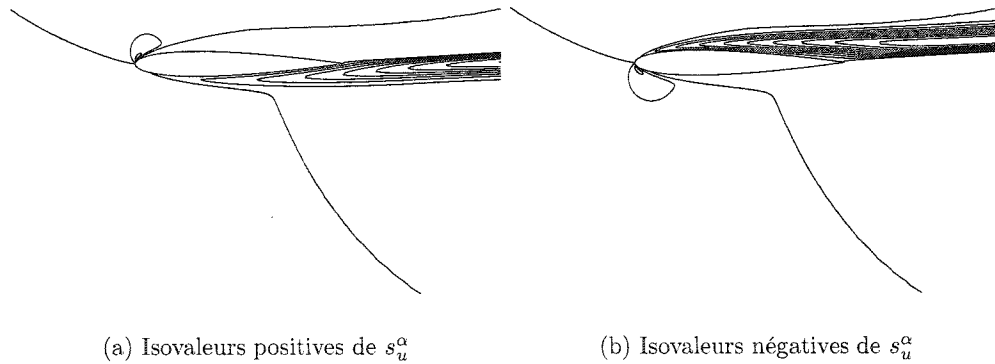


FIG. 5.10 Distribution de  $s_u^\alpha$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$

Ce résultat se retrouve également dans la sensibilité de la pression illustrée à la figure 5.11, puisqu'une augmentation de l'angle d'attaque va provoquer une hausse de la pression sur l'intrados ( $s_p^\alpha$  positif), et une baisse sur l'extrados ( $s_p^\alpha$  négatif), et ce proche du bord d'attaque, déplaçant le maximum de pression (et donc le point de stagnation) vers le bas.

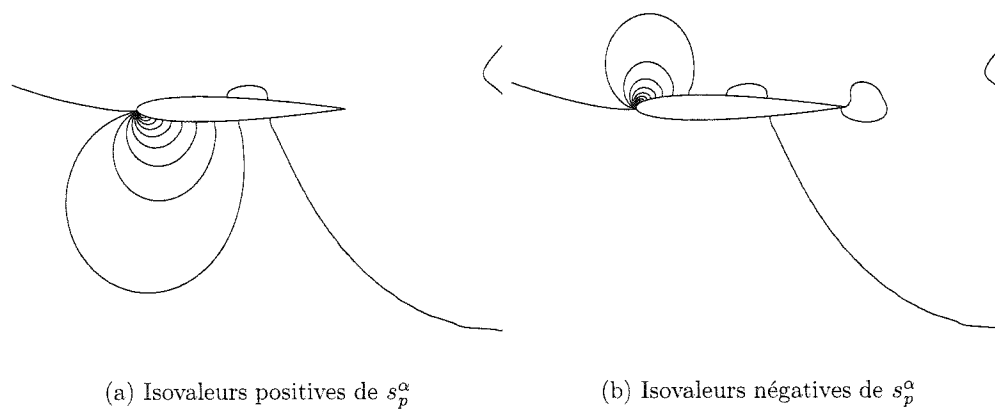


FIG. 5.11 Distribution de  $s_p^\alpha$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$

### 5.3.3 Sensibilités par rapport à $M_r$

La figure 5.12 montre qu'une augmentation du nombre de Mach à l'infini  $M_r$  induit un ralentissement de l'écoulement en avant du bord d'attaque et dans la région adjacente au profil, en direction du bord de fuite. En dehors de ces zones, le fluide sera globalement accéléré. On observera ainsi une augmentation de la zone de recirculation avec le nombre de Mach.

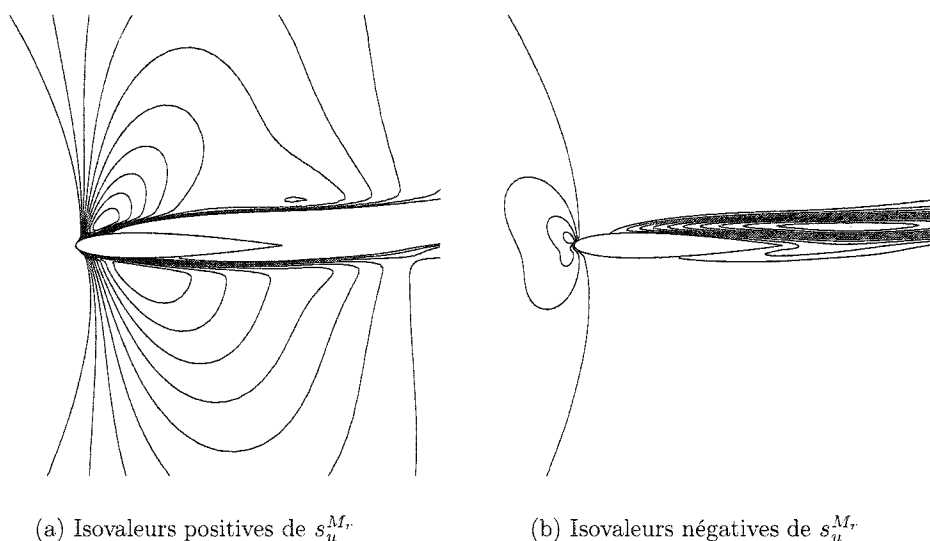


FIG. 5.12 Distribution de  $s_u^{M_r}$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$

La figure 5.13 montre le comportement de la pression face à une variation du nombre de Mach. On remarque qu'une augmentation de  $M_r$  va induire une augmentation de  $p$  au bord d'attaque, ainsi qu'une diminution sur l'intrados et sur l'extrados. Ce résultat peut se retrouver à partir de la formule de Prandtl-Gauert (5.2). La sensibilité de  $C_p^{inc}$  par rapport à  $M_r$  est nulle ( $s_{C_p^{inc}}^{M_r} = 0$ ), et on peut alors

écrire :

$$s_{C_p^c}^{M_r} = M_r \frac{C_p^{inc}}{(1 - M_r^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (5.3)$$

Ainsi,  $s_{C_p^c}^{M_r}$  et la sensibilité de la pression sont du même signe que  $C_p^{inc}$ . La formule (5.2) nous indique alors que  $C_p^c$  et donc  $p$  seront aussi de ce signe. On peut vérifier ceci en comparant les signes de  $p$  et de  $s_p^{M_r}$  autour du profil sur les figures 5.9 et 5.13.

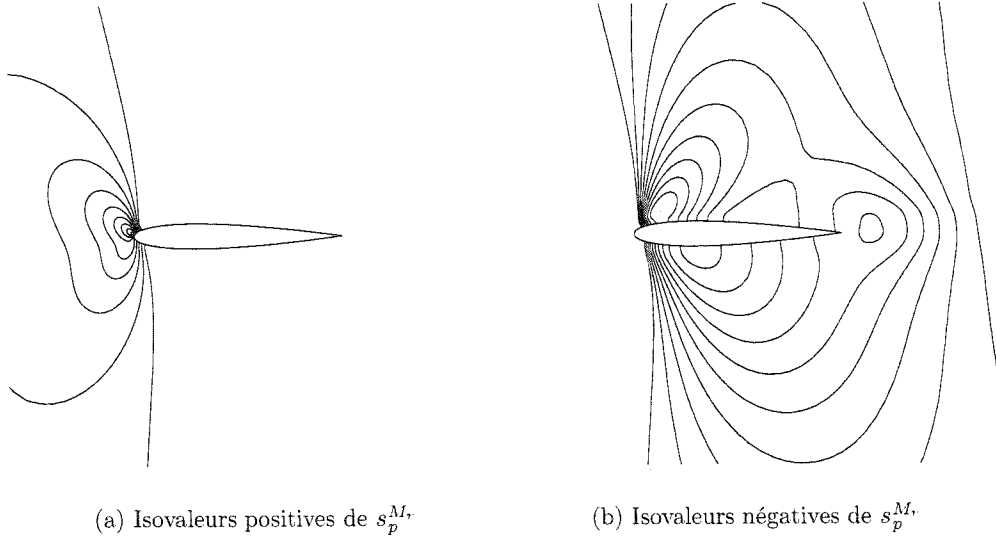


FIG. 5.13 Distribution de  $s_p^{M_r}$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$

### 5.3.4 Sensibilités par rapport à $Re$

En faisant varier le nombre de Reynolds, c'est également les sensibilités de la viscosité que l'on étudie. Ainsi, en augmentant  $Re$  (et donc en diminuant la viscosité), on réduit la taille de la couche limite. À l'extérieur de la couche limite, on observera un ralentissement général de l'écoulement (afin de retrouver plus rapidement les

caractéristiques de l'écoulement à l'infini). Dans la couche limite, la vitesse augmentera globalement (figure 5.14), alors que la zone de recirculation sur l'extrados sera réduite.

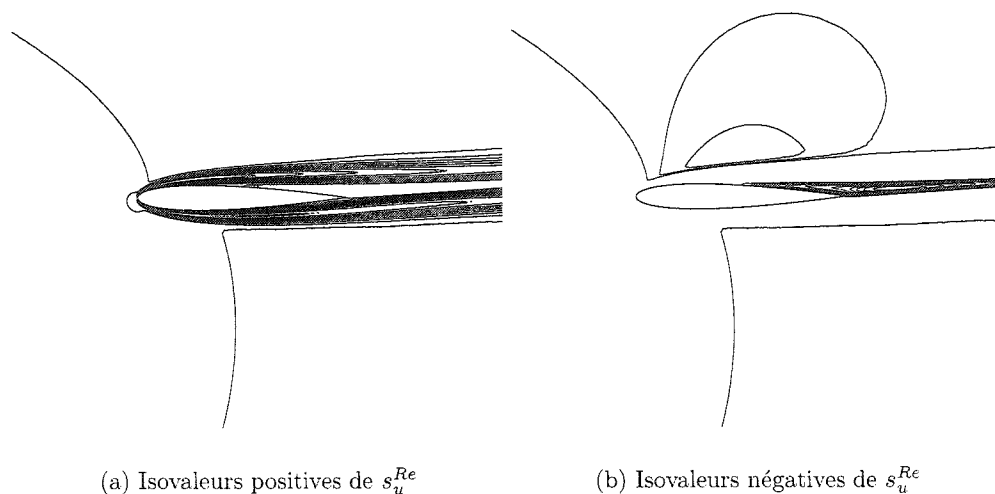


FIG. 5.14 Distribution de  $s_u^{Re}$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$

On retrouve sur la figure 5.15 le fait que les isobares (et donc les isovaleurs de  $s_p^{Re}$ ) sont perpendiculaires au profil. On remarque également la forme spéciale des isovaleurs sur l'extrados, vers le bord d'attaque, et sur l'intrados. Ceci s'explique par le fait que l'épaisseur de la couche limite varie avec le nombre de Reynolds. La pression possède des formes différentes que l'on soit à l'intérieur ou à l'extérieur de la couche limite (elle est constante dans la couche limite dans la direction perpendiculaire au profil). Les sensibilités de  $p$  proche du profil de la figure 5.15 traduisent le changement survenu sur  $p$  avec une modification de l'épaisseur de la couche limite. Enfin, suite à l'augmentation de pression sur l'extrados et la baisse sur l'intrados, on peut prévoir que la portance sera plus faible avec un nombre de Reynolds plus important.

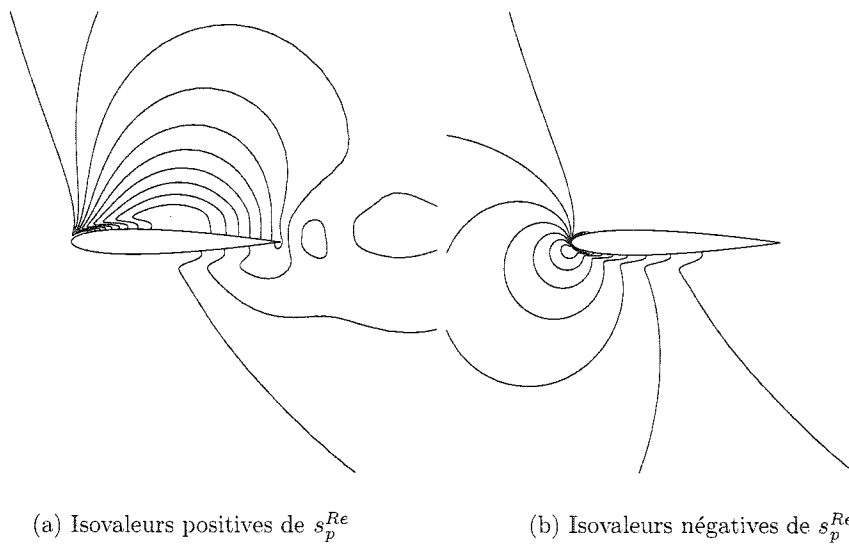


FIG. 5.15 Distribution de  $s_p^{Re}$  pour  $M_r = 0.4$ ,  $\alpha = 3$ ,  $Re = 2000$



Pour la suite de notre étude, nous allons garder comme paramètre l'angle d'incidence  $\alpha$  ainsi que le nombre de Mach à l'infini  $M_r$ . Le nombre de Reynolds  $Re$  sera fixé à 2000 jusqu'à la fin de ce chapitre.

#### 5.4 Calculs de solutions voisines

La courbe de distribution du coefficient de pression varie avec une modification de l'angle d'attaque ou du nombre de Mach. Les sensibilités permettent de prédire le comportement de la solution dans une petite plage de perturbations de ces deux paramètres, sans avoir à relancer les calculs. On écrira l'approximation suivante issue du développement en série de Taylor :

$$C_p(x, y; \alpha + \delta\alpha) \simeq C_p(x, y; \alpha) + \frac{\partial C_p}{\partial \alpha}(x, y; \alpha)\delta\alpha \quad (5.4)$$

$$C_p(x, y; M_r + \delta M_r) \simeq C_p(x, y; M_r) + \frac{\partial C_p}{\partial M_r}(x, y; M_r)\delta M_r \quad (5.5)$$

Cette section est consacrée à l'étude de solutions voisines obtenues à l'aide des sensibilités.

Nous allons tout d'abord regarder la précision de l'extrapolation en faisant varier l'angle d'attaque. Pour cela, nous examinerons la distribution du coefficient de pression autour du profil. Nous nous pencherons ensuite sur le cas où le nombre de Mach à l'infini est notre paramètre d'étude.

##### 5.4.1 Solutions voisines pour $\alpha$ proche de 3 degrés

On part de la solution présentée dans la section précédente. L'angle d'attaque est donc de 3 degrés et le nombre de Mach est de 0.4.

Les figures 5.16 à 5.21 présentent la distribution de  $C_p$  le long du profil. Les figures 5.16 et 5.17 correspondent à des angles cibles de 2 et 4 degrés (une variation de 1 degré sur  $\alpha$ ). Les figures 5.18 et 5.19 représentent une variation de 2 degrés de  $\alpha$  (les angles cibles sont 1 degré et 5 degrés). Enfin, les figures 5.20 et 5.21 montrent les extrapolations pour des angles cibles de 0 et 6 degrés (3 degrés de variation sur  $\alpha$ ). Sur chaque figure, le trait pointillé correspond à la solution de base à 3 degrés. Le trait tireté représente l'extrapolation à partir de 3 degrés. La ligne pleine correspond à la solution à l'angle perturbé (la solution numérique obtenue pour l'angle voulu). L'extrapolation est obtenue à l'aide de la formule (5.4) :

$$C_p(x, y; \alpha + \delta\alpha) \simeq C_p(x, y; \alpha) + \frac{\partial C_p}{\partial \alpha}(x, y; \alpha) \delta\alpha$$

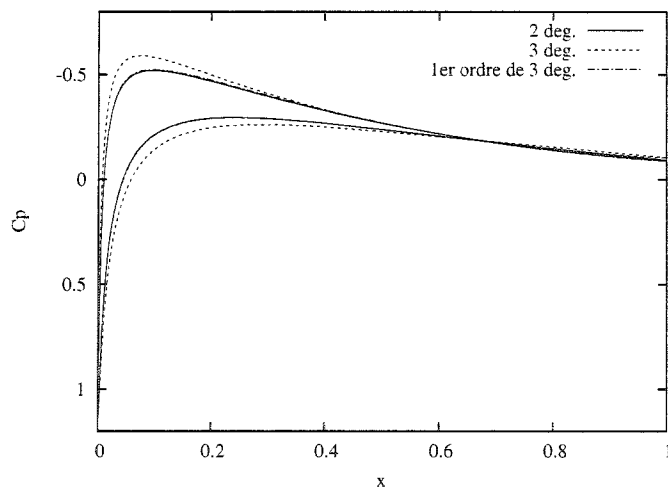
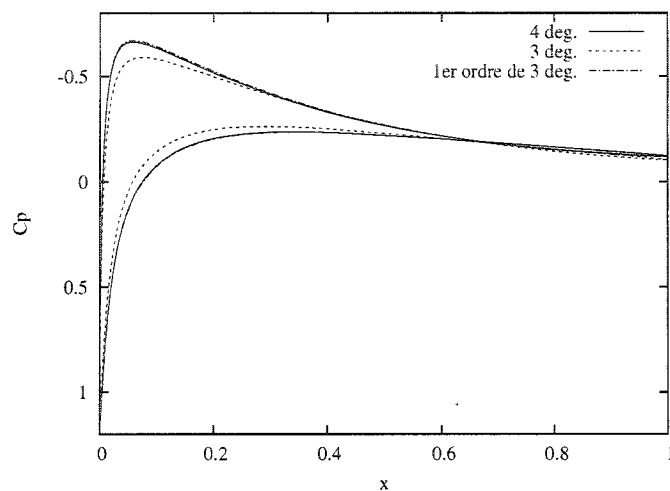
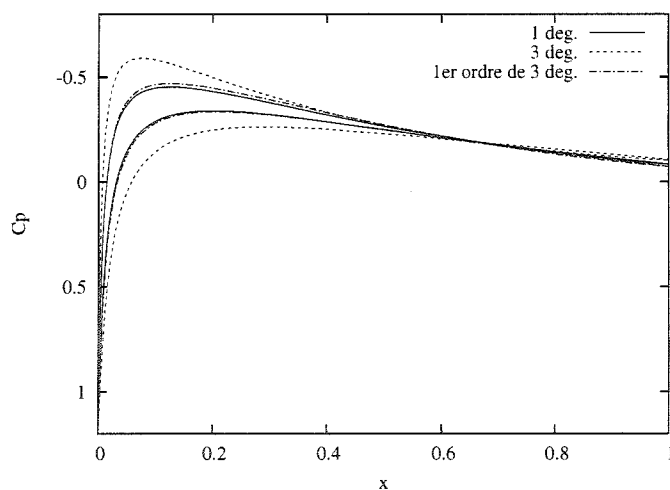


FIG. 5.16 Solution extrapolée à  $\alpha = 2$  à partir de  $\alpha = 3$

On peut ainsi voir la grande précision de l'extrapolation pour de faibles variations de  $\alpha$ , lorsque  $|\delta\alpha|$  vaut un degré par exemple (pour les angles cibles de 2 degrés sur la figure 5.16 et 4 degrés sur la figure 5.17). Pour une variation de deux degrés

FIG. 5.17 Solution extrapolée à  $\alpha = 4$  à partir de  $\alpha = 3$ FIG. 5.18 Solution extrapolée à  $\alpha = 1$  à partir de  $\alpha = 3$ 

(angles cibles : 1 degré sur la figure 5.18 et 5 degrés sur la figure 5.19), l'extrapolation reste précise, mais on remarque que l'on commence à apercevoir de légers écarts entre les deux courbes. Lorsque  $|\delta\alpha| = 3$  degrés (figures 5.20 et 5.21), les

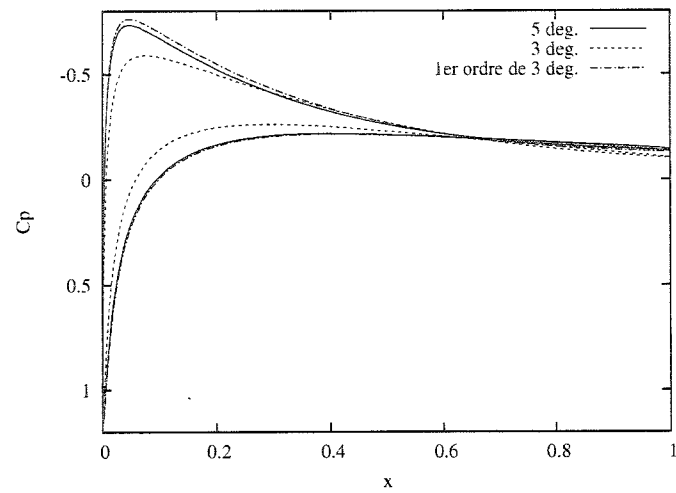


FIG. 5.19 Solution extrapolée à  $\alpha = 5$  à partir de  $\alpha = 3$

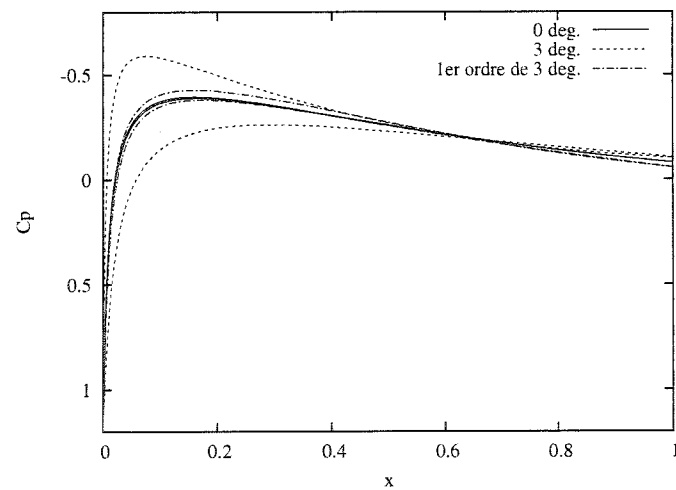


FIG. 5.20 Solution extrapolée à  $\alpha = 0$  à partir de  $\alpha = 3$

différences sont plus marquées dans la zone où les gradients varient beaucoup (le pic de dépression sur l'extrados).

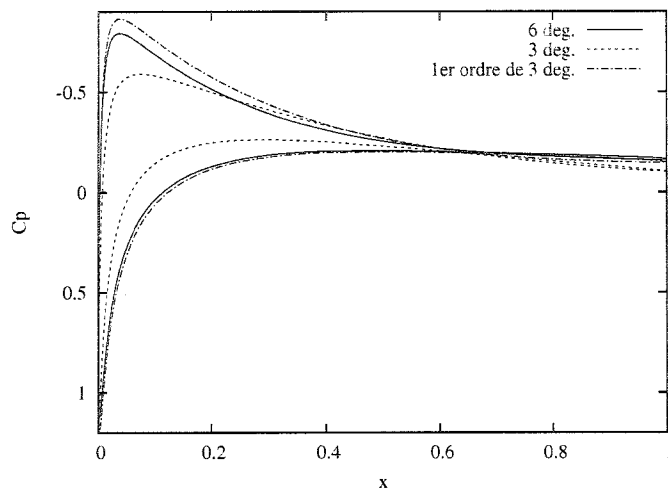


FIG. 5.21 Solution extrapolée à  $\alpha = 6$  à partir de  $\alpha = 3$

On peut donc affirmer que la distribution du coefficient de pression le long du profil ne varie pas linéairement avec l'angle d'attaque. En effet, la formule (5.4) est une approximation, et on néglige les termes d'ordre supérieur dans cette écriture. Si la dépendance de  $C_p$  par rapport à  $\alpha$  avait été linéaire, l'équation (5.4) serait une égalité. Cela se traduirait par une très bonne précision des extrapolations sur les figures 5.16 à 5.21, même pour de grandes valeurs de  $|\delta\alpha|$ .

Pour illustrer ces propos, intéressons nous à la figure 5.22. Elle présente le coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque (on remarque encore qu'à 0 degré, le coefficient est non nul, mais très petit, à cause de l'absence de symétrie dans le maillage). La dépendance est quasi-linéaire pour des valeurs de  $\alpha$  faibles (courbe quasiment droite). Elle s'incline ensuite après 3 degrés. On peut ainsi voir que la courbe d'extrapolation à partir de 0 degrés est très précise dans la première zone (0 à 2 degrés). Celle obtenue à partir de  $\alpha = 3$  est précise pour des angles proches de 3 degrés (2 à 4 degrés).

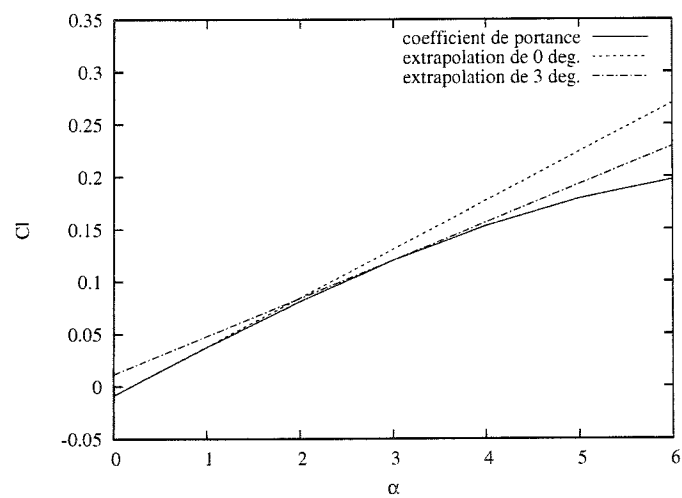


FIG. 5.22 Coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque

Dans toutes ces extrapolations, l'ajout de termes supplémentaires d'ordre supérieur dans la série de Taylor (5.4) devrait en principe améliorer la qualité des résultats.

#### 5.4.2 Solutions voisines pour $M_r$ proche de 0.4

Nous allons maintenant faire varier le nombre de Mach. Nous reprenons la même approche qu'à la section précédente. La solution de base (notre référence) est l'écoulement où l'angle d'attaque est de 3 degrés et le nombre de Mach de 0.4.

Les extrapolations pour des nombres de Mach différents de 0.4 sont présentées sur les figures 5.23 à 5.28. Les valeurs cibles sont dans l'ordre des figures :  $M_r = 0.3$ ,  $M_r = 0.5$ ,  $M_r = 0.2$ ,  $M_r = 0.6$ ,  $M_r = 0.1$ ,  $M_r = 0.7$  et  $M_r = 0$ . On utilise la formule (5.5) pour approcher la solution voisine :

$$C_p(x, y; M_r + \delta M_r) \simeq C_p(x, y; M_r) + \frac{\partial C_p}{\partial M_r}(x, y; M_r) \delta M_r$$

On peut encore voir la qualité de la méthode et des résultats. Pour  $|\delta M_r| = 0.2$  ( $M_r = 0.2$  et  $M_r = 0.6$  sur les figures 5.25 et 5.26), les courbes sont pratiquement superposées. La solution pour  $\delta M_r = -0.3$  ( $M_r = 0.1$ , figure 5.27) est encore très précise. Une valeur de 0.2 pour  $|\delta M_r|$  correspond à un très grand écart. En effet, on a :

$$\frac{|\delta M_r|}{M_r} = \frac{0.2}{0.4} = 50\%$$

On peut donc penser que la dépendance de  $C_p$  par rapport à  $M_r$  est quasi-linéaire, au moins autour de  $M_r = 0.4$ .

Pour appuyer ces propos, la figure 5.30 présente la courbe obtenue en utilisant la

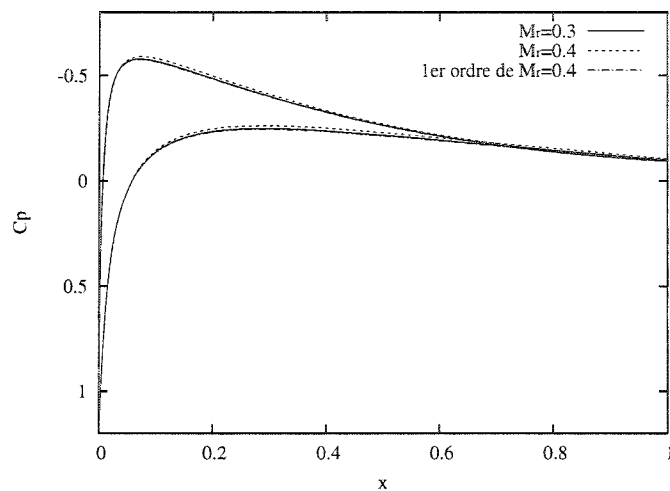


FIG. 5.23 Solution extrapolée à  $M_r = 0.3$  à partir de  $M_r = 0.4$

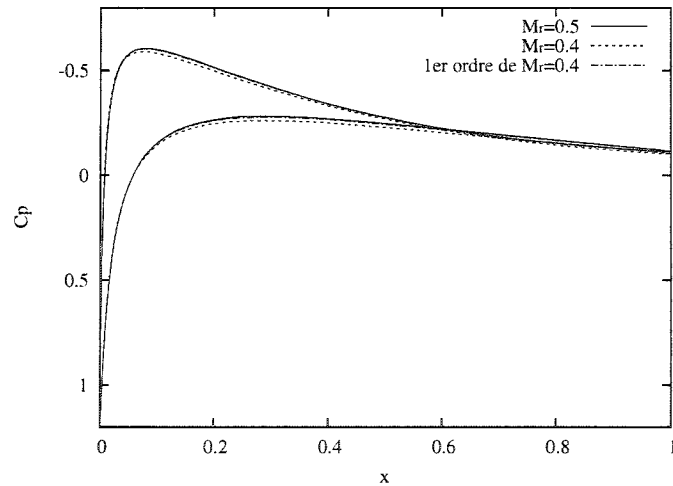


FIG. 5.24 Solution extrapolée à  $M_r = 0.5$  à partir de  $M_r = 0.4$

formule de Prandtl-Gauert (5.2) :

$$C_p^c = \frac{C_p^{inc}}{\sqrt{1 - M_r^2}}$$



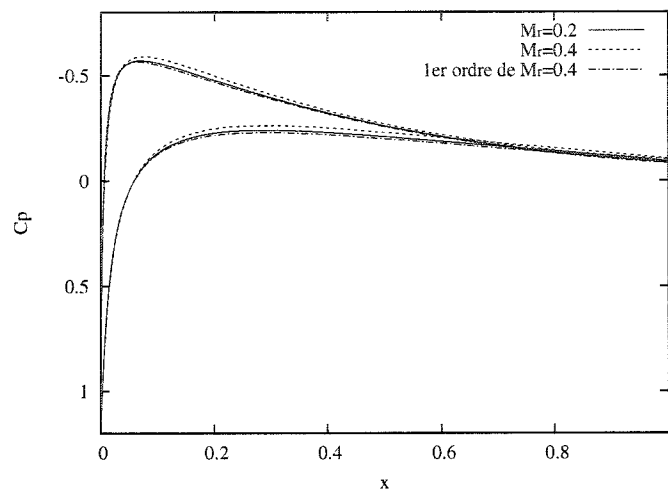


FIG. 5.25 Solution extrapolée à  $M_r = 0.2$  à partir de  $M_r = 0.4$

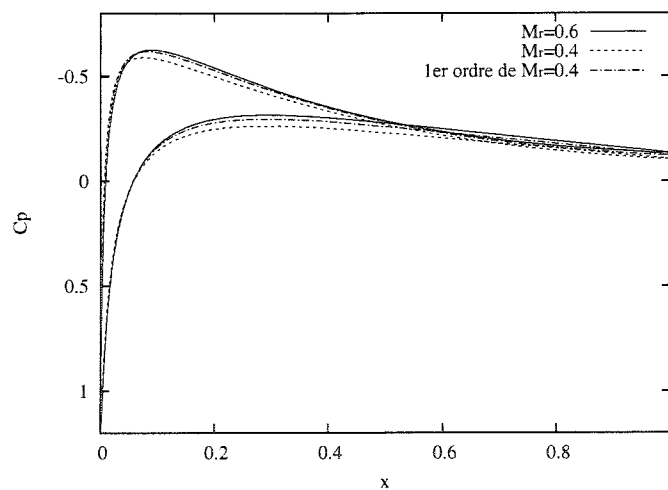


FIG. 5.26 Solution extrapolée à  $M_r = 0.6$  à partir de  $M_r = 0.4$

Sur la figure, les valeurs de  $M_r$  sont comprises entre 0 et 0.7 et nous utilisons  $C_p^{inc} = 1$  pour simplifier. La figure comporte aussi en pointillé l'approximation linéaire issue de  $M_r = 0.4$ .

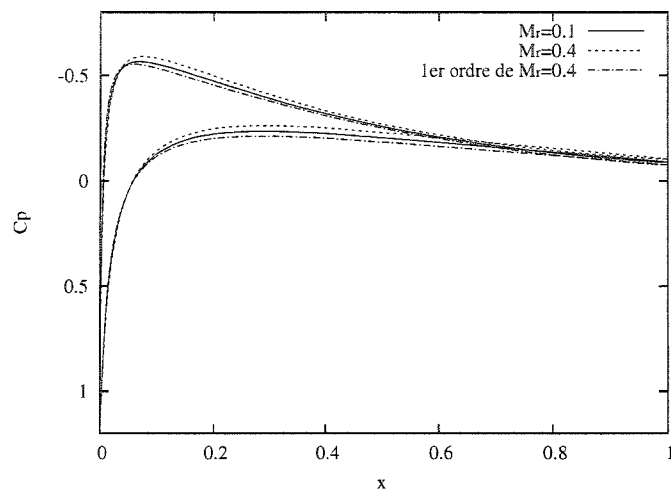


FIG. 5.27 Solution extrapolée à  $M_r = 0.1$  à partir de  $M_r = 0.4$

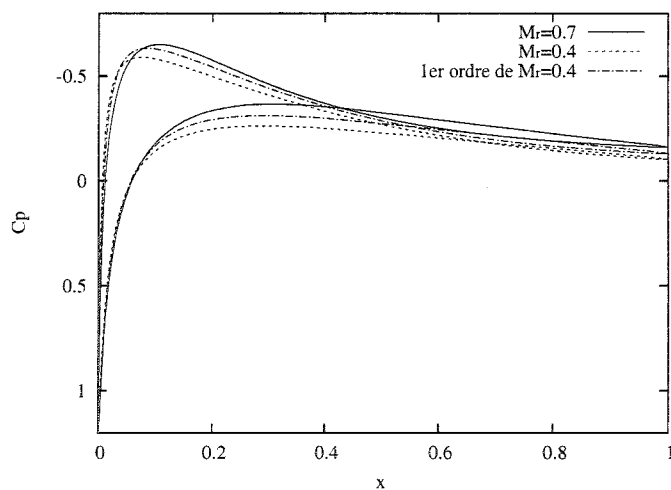


FIG. 5.28 Solution extrapolée à  $M_r = 0.7$  à partir de  $M_r = 0.4$

Ainsi, malgré la perturbation importante pour  $|\delta M_r| = 0.2$ , les écarts entre la courbe et la droite sont inférieurs à 5% (moins de 3.5% en  $M_r = 0.2$  et moins de 4.5% en  $M_r = 0.6$ ), montrant ainsi que l'approximation linéaire est précise.

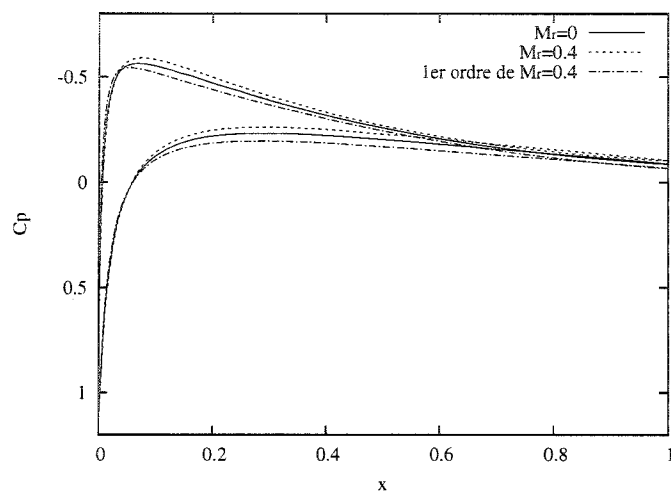


FIG. 5.29 Solution extrapolée à  $M_r = 0$  à partir de  $M_r = 0.4$

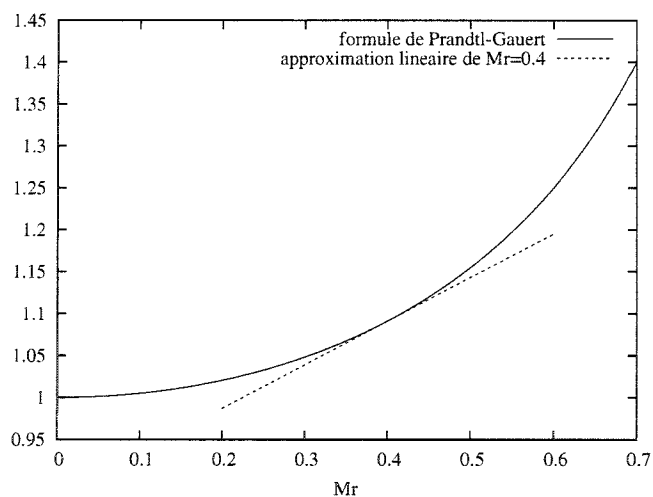


FIG. 5.30 Coefficient de pression selon la formule de Prandtl-Gauert

#### 5.4.3 Solutions voisines pour des valeurs de $\alpha$ proches de 3 degrés et des valeurs de $M_r$ proches de 0.4

Dans cette partie, nous nous intéresserons aux calculs de solutions voisines lorsque  $\alpha$  et  $M_r$  varient simultanément. Nous utilisons donc la formule suivante (5.6) pour

approcher la solution cible :

$$C_p(x, y; \alpha + \delta\alpha, M_r + \delta M_r) \simeq C_p(x, y; \alpha, M_r) + \frac{\partial C_p}{\partial \alpha} \delta\alpha + \frac{\partial C_p}{\partial M_r} \delta M_r \quad (5.6)$$

Seuls le termes de premier ordre sont conservés.

La figure 5.31 récapitule les cas que nous avons observés précédemment. Les croix correspondent aux extrapolations que nous avons étudiées dans les paragraphes précédents. Le carré délimité par le trait gras indique la zone où les résultats précédents étaient très précis. Nous allons donc essayer d'obtenir les solutions extrapolées pour le reste de la zone, représentées par les numéros 1 à 4, pour voir la qualité de ces résultats.

$\alpha \backslash M_r$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0					X			
1			①	②	X	②	①	
2			③	④	X	④	③	
3	X	X	X	X	X	X	X	X
4			③	④	X	④	③	
5			①	②	X	②	①	
6					X			

FIG. 5.31 Récapitulatif des cas déjà étudiés

Les figures 5.32 à 5.35 montrent les solutions correspondant aux quatre conditions

des zones 1 de la figure 5.31, c'est-à-dire où  $|\delta\alpha| = 2$  et  $|\delta M_r| = 0.2$  :

- $\alpha = 1, M_r = 0.2$
- $\alpha = 1, M_r = 0.6$
- $\alpha = 5, M_r = 0.2$
- $\alpha = 5, M_r = 0.6$

Là encore, le trait plein représente la solution numérique cible, le trait pointillé correspond à la solution de laquelle nous partons pour l'extrapolation et le trait tireté est la solution extrapolée. On peut voir que les résultats ne sont pas parfaits et on remarque un léger décalage, comme on pourrait s'y attendre puisque, comme observé dans les paragraphes précédents, nous sommes en présence de valeurs de  $|\delta\alpha|$  et de  $|\delta M_r|$  relativement grandes pour notre extrapolation. Nous commençons à sortir de la zone où l'extrapolation linéaire pour  $\alpha$  et  $M_r$  est précise.

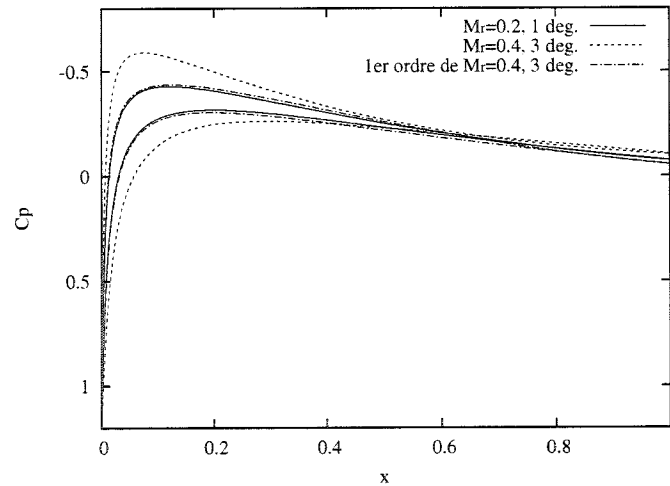


FIG. 5.32 Solution extrapolée à  $(\alpha = 1, M_r = 0.2)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

Sur les figures 5.36 à 5.39, on a gardé la même valeur de  $|\delta\alpha|$ , mais on a diminué  $|\delta M_r|$  à 0.1. Ceci correspond aux zones 2 sur la figure 5.31 :

- $\alpha = 1, M_r = 0.3$

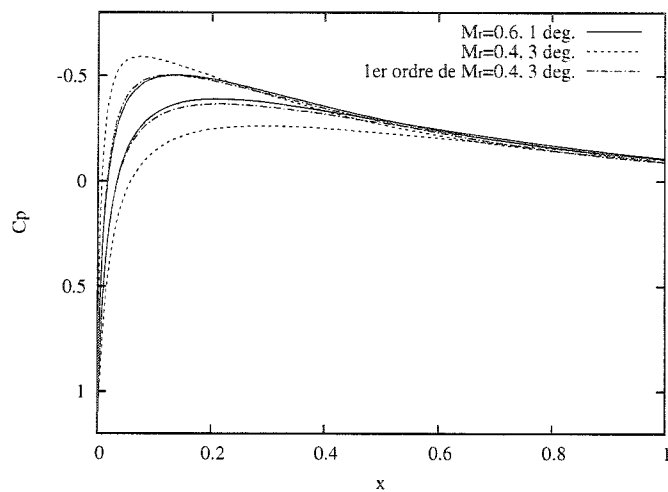


FIG. 5.33 Solution extrapolée à  $(\alpha = 1, M_r = 0.6)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

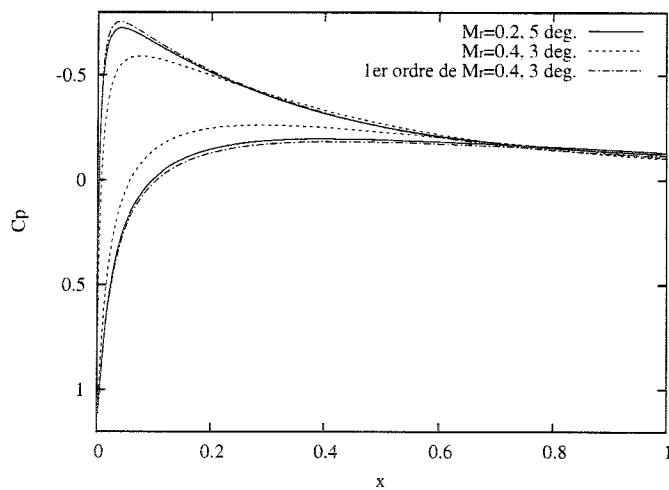


FIG. 5.34 Solution extrapolée à  $(\alpha = 5, M_r = 0.2)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

- $\alpha = 1, M_r = 0.5$
- $\alpha = 5, M_r = 0.3$

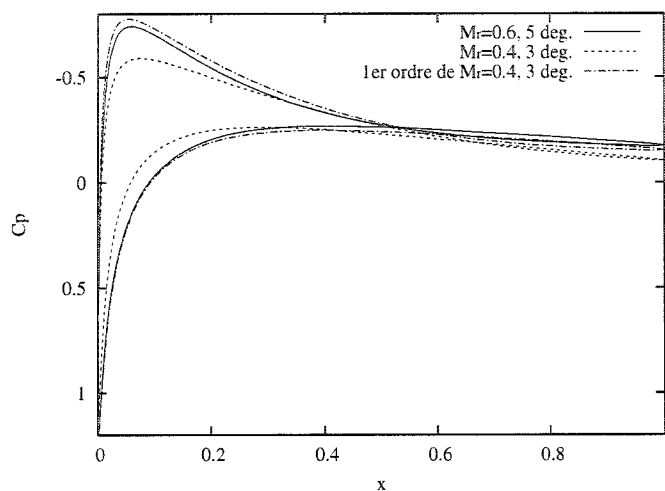


FIG. 5.35 Solution extrapolée à  $(\alpha = 5, M_r = 0.6)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

- $\alpha = 5, M_r = 0.5$

Les résultats sont plus précis que dans le cas précédents, puisque la solution cible est plus proche. Les écarts visibles sont minimales. L'extrapolation linéaire pour  $M_r$  est précise, mais on commence à sortir de l'exactitude de l'extrapolation linéaire pour  $\alpha$ .

Pour les courbes correspondant à la zone 3 de la figure 5.31, on a procédé au changement inverse, à savoir qu'on regarde les cas où  $|\delta\alpha| = 1$  et  $|\delta M_r| = 0.2$ . Les résultats sont visibles sur les figures 5.40 à 5.43. Les cas traités sont les suivants :

- $\alpha = 2, M_r = 0.2$
- $\alpha = 2, M_r = 0.6$
- $\alpha = 4, M_r = 0.2$
- $\alpha = 4, M_r = 0.6$

Les différences entre la solution exacte et l'extrapolation sont encore plus petites que précédemment et sont presque imperceptibles. En effet, nous avons vu dans les

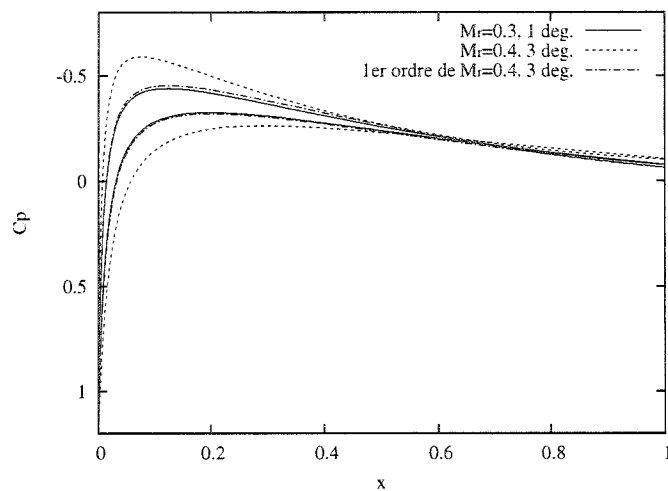


FIG. 5.36 Solution extrapolée à  $(\alpha = 1, M_r = 0.3)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

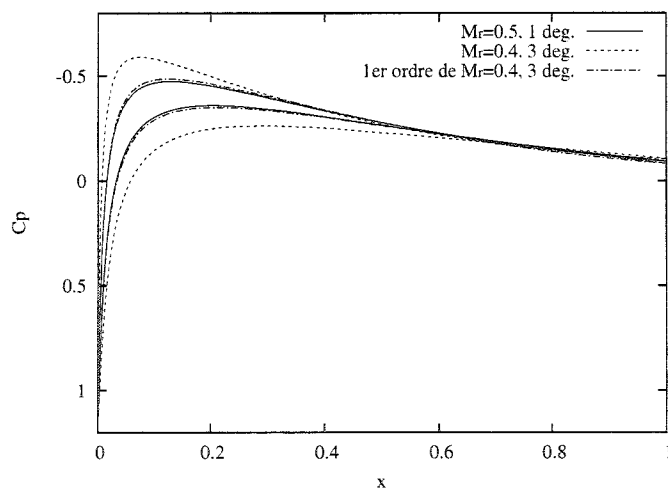


FIG. 5.37 Solution extrapolée à  $(\alpha = 1, M_r = 0.5)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

paragraphe précédents que l'extrapolation linéaire pour  $M_r$  semblait plus précise que celle pour  $\alpha$  (pour les variations que nous considérons). Ainsi, les résultats pour



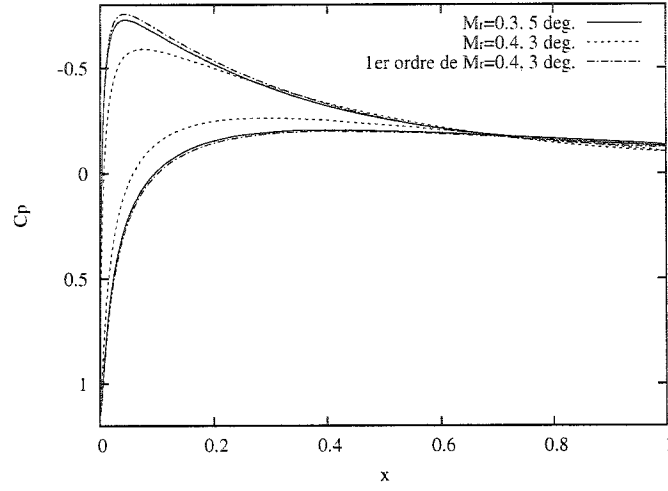


FIG. 5.38 Solution extrapolée à  $(\alpha = 5, M_r = 0.3)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

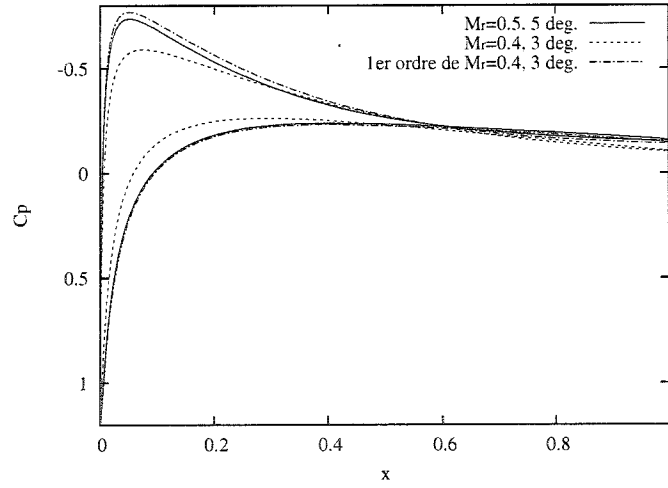


FIG. 5.39 Solution extrapolée à  $(\alpha = 5, M_r = 0.5)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

les extrapolations de la zone 3 de la figure 5.31 sont plus proches de la solution numérique recalculée que ceux de la zone 2 de la figure 5.31.

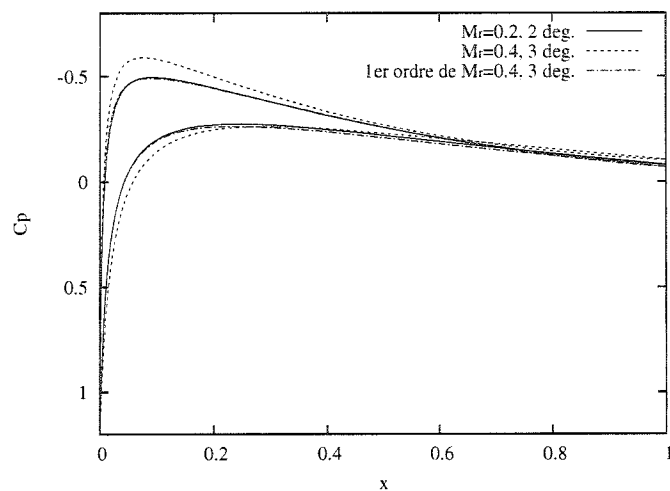


FIG. 5.40 Solution extrapolée à  $(\alpha = 2, M_r = 0.2)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

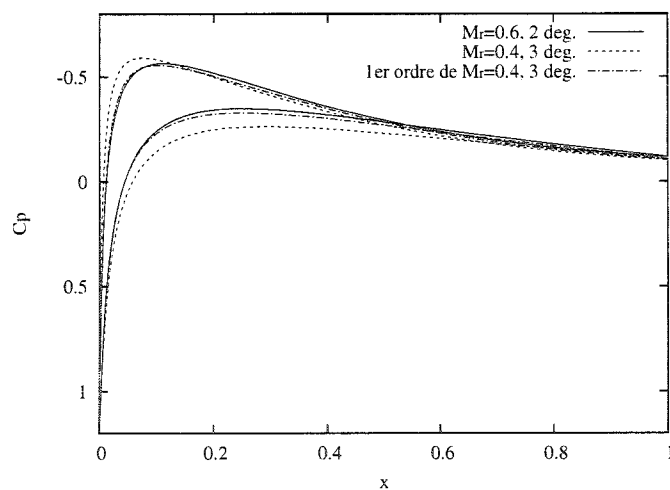


FIG. 5.41 Solution extrapolée à  $(\alpha = 2, M_r = 0.6)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

Enfin, les figures 5.40 à 5.47, représentant les quatres cas situés dans la zone 4 de la figure 5.31, montrent le cas où les variations sur  $\alpha$  et sur  $M_r$  sont les plus faibles,

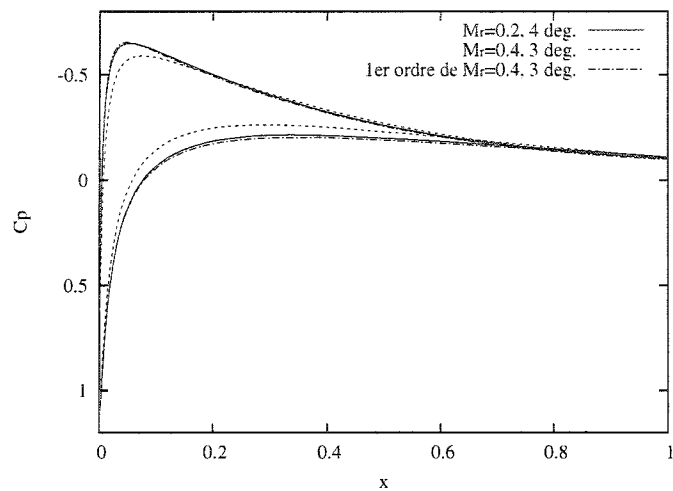


FIG. 5.42 Solution extrapolée à  $(\alpha = 4, M_r = 0.2)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

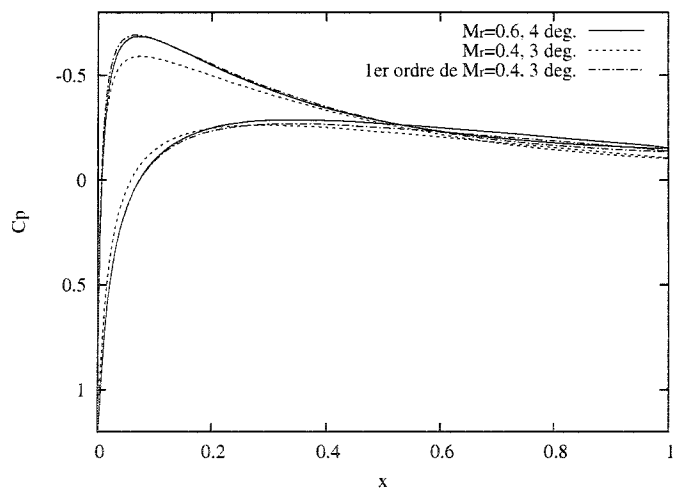


FIG. 5.43 Solution extrapolée à  $(\alpha = 4, M_r = 0.6)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

à savoir  $|\delta\alpha| = 1$  et  $|\delta M_r| = 0.1$  :

–  $\alpha = 2, M_r = 0.3$

- $\alpha = 2, M_r = 0.5$
- $\alpha = 4, M_r = 0.3$
- $\alpha = 4, M_r = 0.5$

L'extrapolation est pratiquement exacte et les courbes se superposent de manière quasi-parfaite. Nous sommes situés dans une zone où les résultats pour l'extrapolation linéaire, à la fois pour  $\alpha$  et pour  $M_r$ , sont très précis.

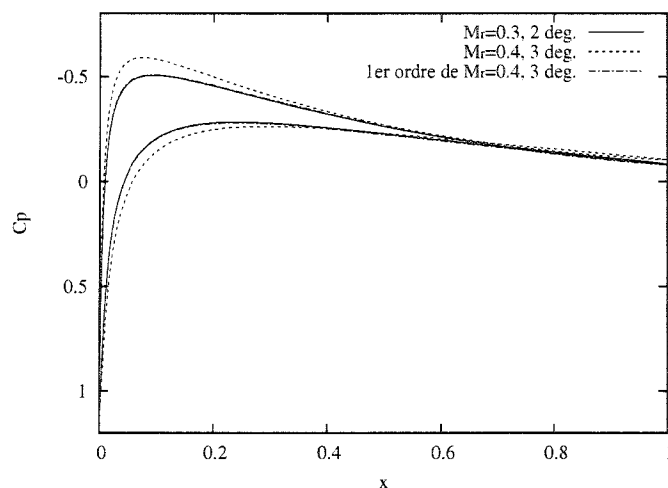


FIG. 5.44 Solution extrapolée à  $(\alpha = 2, M_r = 0.3)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

## 5.5 Conclusion

À travers l'étude du profil d'aile NACA0012, nous avons pu voir quelques utilisations des sensibilités. Ainsi, à l'aide des champs des sensibilités, nous avons pu expliquer et prévoir certains comportements des variables d'écoulement face à divers paramètres. Nous avons également pu vérifier la méthode de calcul des solutions voisines, qui permet, avec un seul calcul, de connaître une plage de solutions proches. Cette méthode permet ainsi de gagner du temps en utilisant le calcul déjà

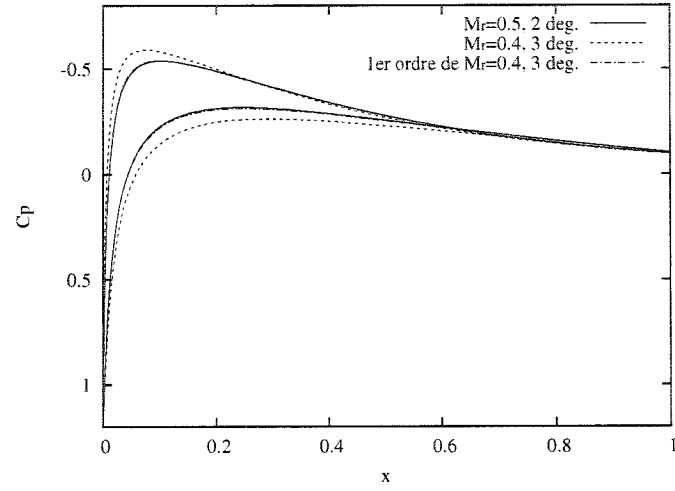


FIG. 5.45 Solution extrapolée à  $(\alpha = 2, M_r = 0.5)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

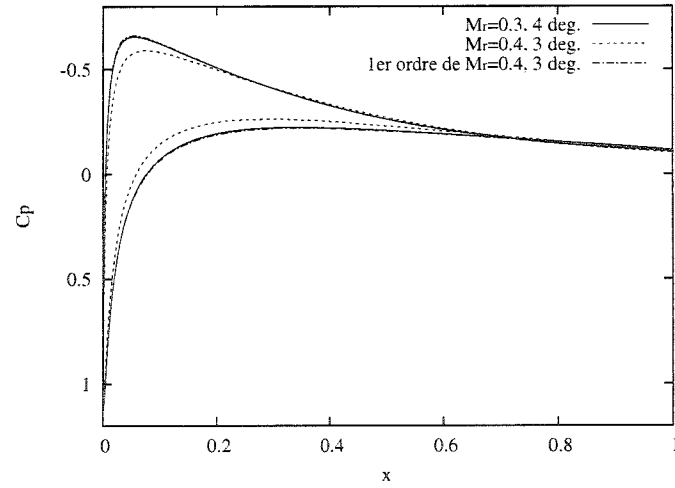


FIG. 5.46 Solution extrapolée à  $(\alpha = 4, M_r = 0.3)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

effectué, au lieu de relancer une autre simulation. Nous avons pu voir aussi qu'elle était très précise et permettait de très bonnes prévisions, à condition de considérer

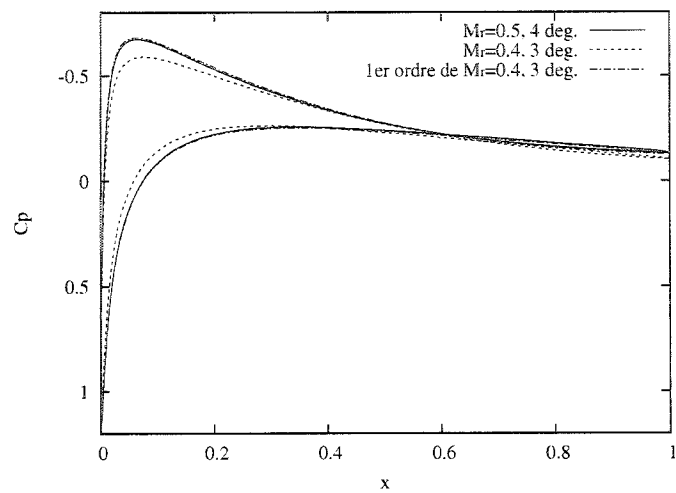


FIG. 5.47 Solution extrapolée à  $(\alpha = 4, M_r = 0.5)$  à partir de  $(\alpha = 3, M_r = 0.4)$

des variations faibles pour les paramètres.

## CHAPITRE 6

### APPLICATION À UN JET AXISYMÉTRIQUE

Dans ce chapitre, nous appliquerons notre méthode adaptative à la solution d'un jet impactant réel. Après avoir décrit la solution de l'écoulement pour différentes conditions (différents gaz, différentes conditions aux limites), nous utiliserons la MES pour compléter notre étude.

#### 6.1 Description du problème

Cette géométrie a déjà été étudiée par Turgeon *et al* <sup>[30]</sup>. Le problème se compose d'un tube, duquel émane le jet qui impacte sur le mur, tel que représenté sur la figure 6.1. Notre longueur de référence est le diamètre  $d$  du tube, qui a une longueur de  $6d$ . La distance entre les lèvres du tube et le mur est de  $2d$ . Le domaine de calcul s'étend jusqu'à  $15d$  au-dessus de l'axe de symétrie. Enfin, l'épaisseur du tube est considérée petite et vaut  $0.02d$ .

La vitesse de référence est la vitesse moyenne du fluide à l'entrée du tube. Le profil de vitesse est parabolique. La température de référence  $T_r$  correspond également à la température du fluide à l'entrée, mais que l'on choisit identique à la température ambiante. Notons que la seule valeur connue pour la pression est la valeur de la pression ambiante. C'est donc celle-ci que l'on choisit comme pression de référence  $p_r$ , en imposant une traction normale nulle aux frontières extérieures du domaine. Donc les valeurs ambiantes de la pression et de la température sont choisies pour les valeurs de référence, même si ce choix semble peu intuitif au premier abord. Le

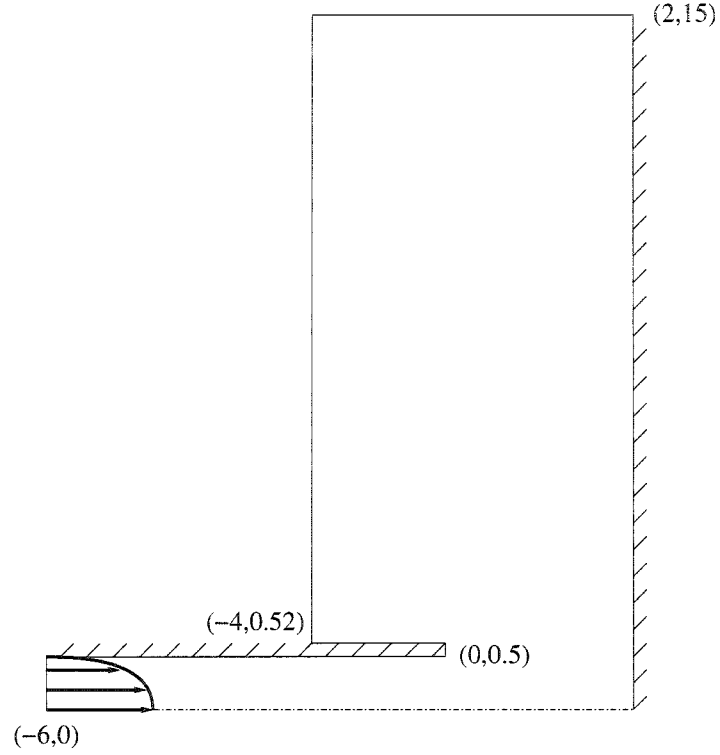


FIG. 6.1 Géométrie du jet impactant

nombre de Mach de référence est établi à l'aide de la vitesse et de la température du fluide en entrée (qui vaut  $T_r$ ) et est donc bien représentatif des conditions d'entrée.

Nous étudierons plusieurs cas, en considérant que l'on injecte du fluide froid sur un mur chaud, du fluide chaud sur un mur froid, et en utilisant de l'air ou du dioxyde de carbone. Pour le jet froid sur un mur chaud, on prendra comme valeur numérique pour la température du fluide  $T_r = 300^\circ K$  et  $T_w = 600^\circ K$  pour celle du mur. Le coefficient  $\beta_r$ , représentatif des différences de température du problème, aura donc comme expression  $\frac{T_w - T_r}{T_r} = 1$ . Dans le cas du jet chaud impactant sur le mur froid, nous aurons  $T_r = 600^\circ K$ ,  $T_w = 300^\circ K$ , et donc  $\beta_r = \frac{T_w - T_r}{T_r} = -0.5$ .



Les propriétés du fluide  $c_p$ ,  $\mu$  et  $\lambda$  sont variables et leurs expressions sont fournies par Aihara *et al* <sup>[1]</sup>. Ainsi, pour l'air on a :

$$c_p = (\beta_r T + 1)^{0.05}$$

$$\mu = (\beta_r T + 1)^{0.68}$$

$$\lambda = (\beta_r T + 1)^{0.76}$$

et pour le CO<sub>2</sub> :

$$c_p = (\beta_r T + 1)^{0.34}$$

$$\mu = (\beta_r T + 1)^{1.5} \frac{1 + 230/T_r}{(\beta_r T + 1) + 230/T_r}$$

$$\lambda = (\beta_r T + 1)^{1.5} \frac{1 + (1440/T_r)^2}{(\beta_r T + 1)^2 + (1440/T_r)}$$

Dans tous les calculs, on prendra un nombre de Reynolds égal à 500.

Les applications d'un tel jet ont été de grand intérêt au monde de l'ingénierie depuis de nombreuses années, car elles sont multiples. On peut ainsi penser au refroidissement d'équipement électronique ou des ailettes d'une turbine, le séchage de textile ou de papier, ou bien encore à l'étude de transferts de chaleur pour les métaux ou les verres. Les coefficients de transfert de chaleur générés dans ces cas-là sont très importants, ce qui a motivé la recherche dans ce domaine. Notre approche est numérique et permet de comprendre, d'analyser et d'optimiser le système présenté.

La plupart des résultats obtenus pour l'écoulement ont déjà été présentés par Turgeon *et al.* <sup>[30]</sup>.

## 6.2 Étude de Convergence

Nous allons considérer plusieurs paramètres dans notre étude des sensibilités. On peut écrire les propriétés du fluide de la manière suivante :

$$c_p = (\beta_r T + 1)^{A_{c_p}}$$

$$\mu = (\beta_r T + 1)^{A_\mu}$$

$$\lambda = (\beta_r T + 1)^{A_\lambda}$$

pour l'air, et

$$c_p = (\beta_r T + 1)^{A_{c_p}}$$

$$\mu = (\beta_r T + 1)^{A_\mu} \frac{1 + 230/T_r}{(\beta_r T + 1) + 230/T_r}$$

$$\lambda = (\beta_r T + 1)^{A_\lambda} \frac{1 + (1440/T_r)^2}{(\beta_r T + 1)^2 + (1440/T_r)}$$

pour le CO<sub>2</sub>.

Nous prendrons donc ces exposants ( $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$ ) ainsi que le nombre de Mach  $M_r$  comme paramètres d'étude. Le choix des exposants permettra de faire une comparaison entre l'air et le CO<sub>2</sub>.

La figure 6.2 représente le maillage final obtenu dans le cas du jet d'air froid sur le mur chaud. On adapte ce maillage en utilisant les erreurs pour l'écoulement et les sensibilités. Il comporte 93729 nœuds et a nécessité 5 cycles d'adaptation. La figure 6.3 est un agrandissement de la zone du point de stagnation afin de voir plus précisément les zones caractéristiques. En effet, sur la figure 6.2, on pourrait penser que le maillage est aussi raffiné à l'intérieur du tube que le long du mur, alors que ce n'est pas le cas. Le raffinement à l'intérieur du tube est dû aux sensibilités

par rapport à  $M_r$ . Un maillage adapté uniquement pour l'écoulement n'aurait pas présenté le raffinement à cet endroit. En effet, les maillages peuvent différer si l'on adapte selon l'écoulement seul ou avec les sensibilités. Un exemple très prononcé de ces différences a été montré par Pelletier *et al* [22]. On peut donc voir sur la figure 6.3 les zones caractéristiques du problème, à savoir la zone où le jet impacte sur le mur, la couche cisailée émanant des lèvres du tube et également la couche limite le long du mur.

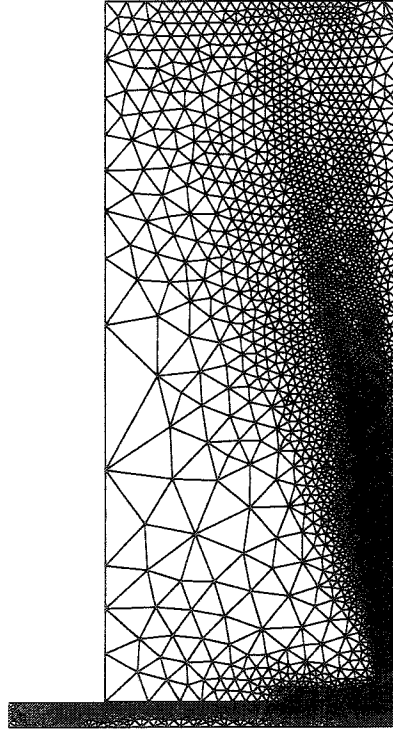


FIG. 6.2 Maillage final

La figure 6.4 montrent les contours des différentes variables ( $u$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $T$ ). Le jet frappe le mur (où la pression est maximale) et est dévié dans la direction radiale,

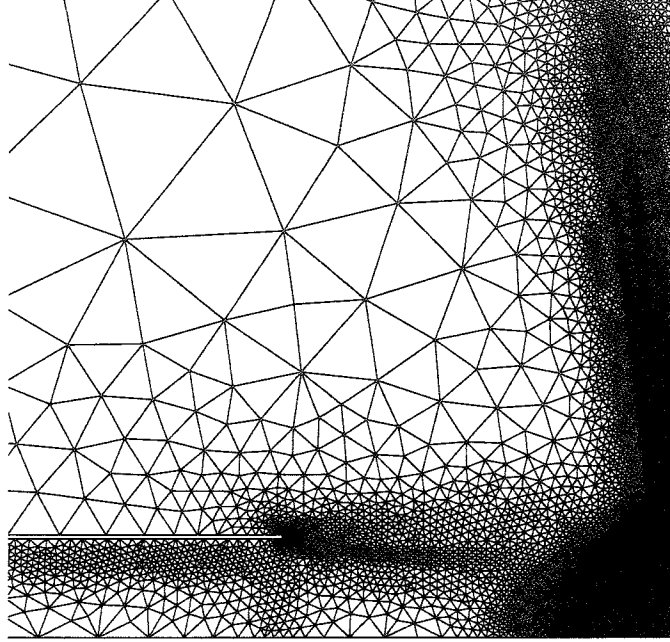


FIG. 6.3 Maillage final (agrandissement)

puis ralentit à mesure que l'on s'éloigne de l'axe. La couche limite qui se développe est visible sur la courbe de contours de la vitesse radiale, où on observe un maximum proche du mur, non loin de l'axe, et de forts gradients dans cette zone. Notons également la légère hausse de température en amont du point de stagnation. Cette hausse provient des effets de compressibilité.

La figure 6.5 présente la distribution du nombre de Nusselt le long du mur au cours des différents cycles. Le nombre de Nusselt s'écrit :

$$Nu = \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \quad (6.1)$$

Dès le troisième cycle, on commence à apercevoir la forme finale et par la suite, les variations du nombre de Nusselt sont faibles (moins de 0.1% au point de stagnation

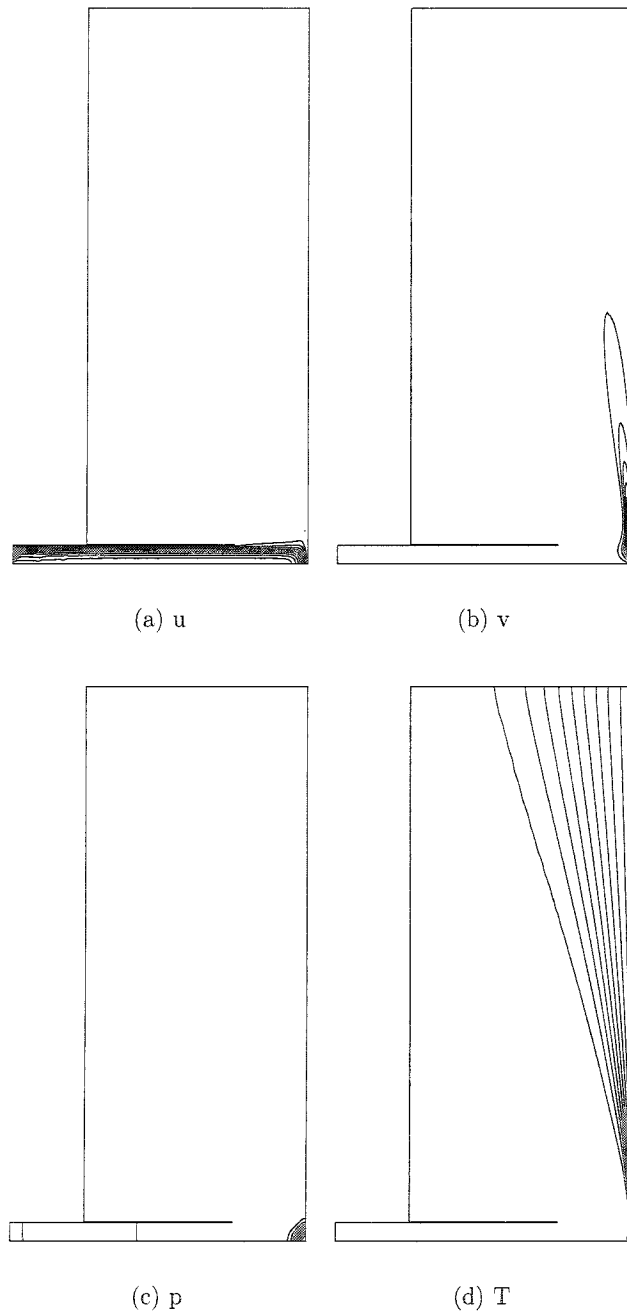


FIG. 6.4 Contours des variables d'écoulement (mur chaud)

entre les cycles 3 et 4), indiquant ainsi que la solution est précise et le maillage bien adapté.

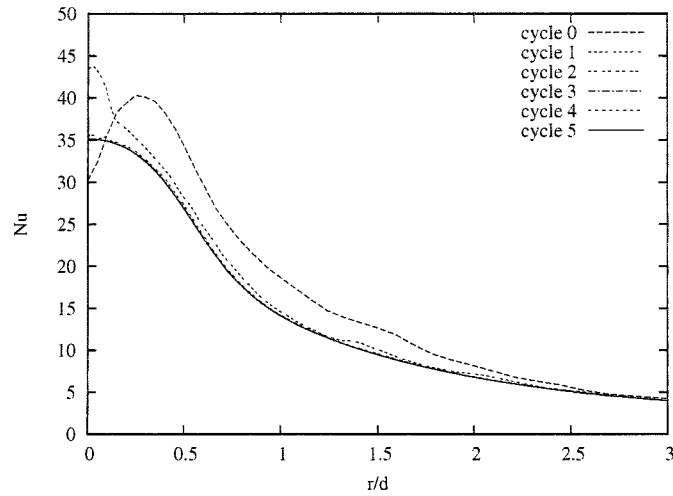


FIG. 6.5 Convergence du nombre de Nusselt au cours des cycles (mur chaud)

La distribution du coefficient de friction le long du mur est représentée sur la figure 6.6. Son expression est la suivante :

$$C_f = -2 \frac{\mu_w}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \quad (6.2)$$

Celui-ci est nul sur l'axe, par symétrie, puis augmente jusqu'à une valeur maximale, correspondant à peu près au maximum de vitesse radiale  $v$ . Il diminue par la suite. Ici encore, au bout du troisième cycle, la solution semble convergée et précise.

### 6.3 Comparaison tube long - tube court

Le lecteur aura certainement remarqué que la longueur de notre tube est beaucoup plus importante que celle de la configuration de Turgeon *et al.* <sup>[30]</sup>. Ces derniers

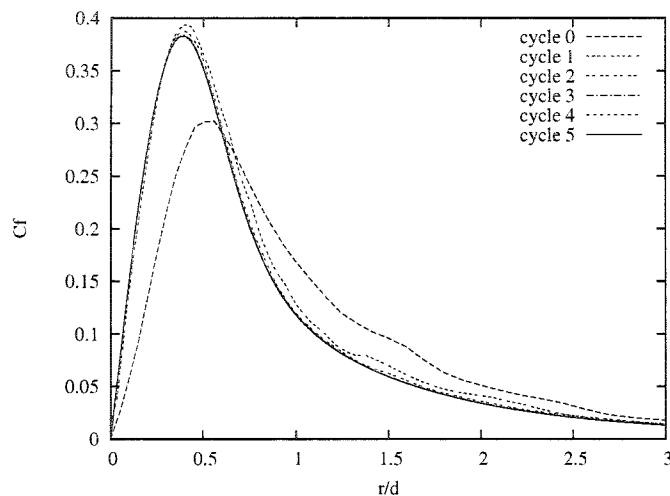


FIG. 6.6 Convergence du coefficient de friction au cours des cycles (mur chaud)

effectuaient une comparaison entre les résultats incompressibles et compressibles et utilisaient un tube court de  $0.2d$  de longueur afin d'éviter les chutes de température dues à la friction pour des écoulements compressibles. Dans notre cas, nous nous intéressons plus particulièrement aux calculs de sensibilités, et il est plus difficile d'imposer de bonnes conditions aux limites pour les sensibilités dans le cas du tube court. Les différences entre les deux configurations sont visibles sur les figures 6.7 et 6.8 où sont représentés le nombre de Nusselt  $Nu$  et le coefficient de friction  $C_f$  le long du mur.

Les figures 6.7 et 6.8 ont été obtenues dans le cas du jet d'air froid sur le mur chaud. Le nombre de Nusselt (sur la figure 6.7) est légèrement plus élevé dans le cas du tube long (courbe pleine sur la figure) que dans celui du tube court (courbe en tireté). En effet, l'étude d'un écoulement de Fanno <sup>[2]</sup> nous apprend que pour un écoulement subsonique (ce qui est notre cas), le fluide se refroidit en s'écoulant vers l'aval. Dans le cas du tube long, la température de l'air à la sortie du tube

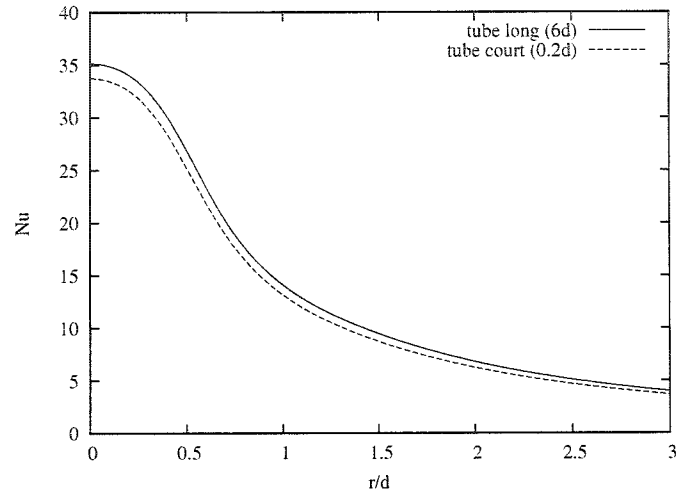


FIG. 6.7 Comparaison du nombre de Nusselt pour un tube long et un tube court

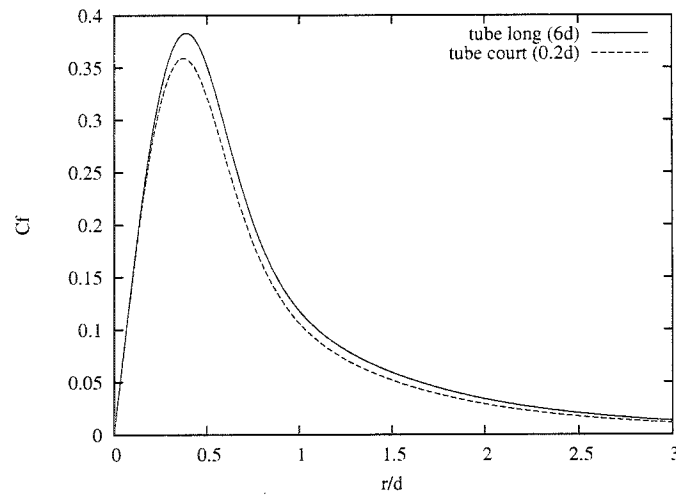


FIG. 6.8 Comparaison du coefficient de friction pour un tube long et un tube court

est donc un peu plus éloignée de celle du mur chaud. Les gradients de température sont donc plus importants que dans le cas du tube court, proche du mur (puisque le mur a même température dans les deux cas). Puisque la température du mur



est la même dans les deux configurations,  $\lambda_w$  est le même. Le nombre de Nusselt est donc supérieur dans le cas où le tube a une longueur de  $6d$  que dans celui où il fait  $0.2d$  de long, au moins dans la région proche de l'axe.

Sur la figure 6.8, on présente le coefficient de friction. La courbe pleine correspond au tube long et la courbe en tireté au tube court. Ce coefficient est plus important dans le cas du tube long. Là encore, l'écoulement de Fanno nous donne l'explication. Dans notre cas où les conditions en entrée correspondent à un écoulement subsonique, le fluide est accéléré le long du tube. L'air arrive donc plus vite lorsqu'il rencontre le mur, où sa vitesse est nulle. Les gradients de vitesse au voisinage du mur apparaissant dans le coefficient de friction augmentent donc avec la longueur du tube. Là encore, la viscosité au mur a la même valeur quelle que soit la longueur du tube. Le coefficient de friction est alors plus important pour un tube long. On peut voir sur la figure 6.9 la forme de la vitesse horizontale à différentes positions le long du tube. Le profil, développé, a bien une forme parabolique et la vitesse augmente jusqu'aux lèvres.

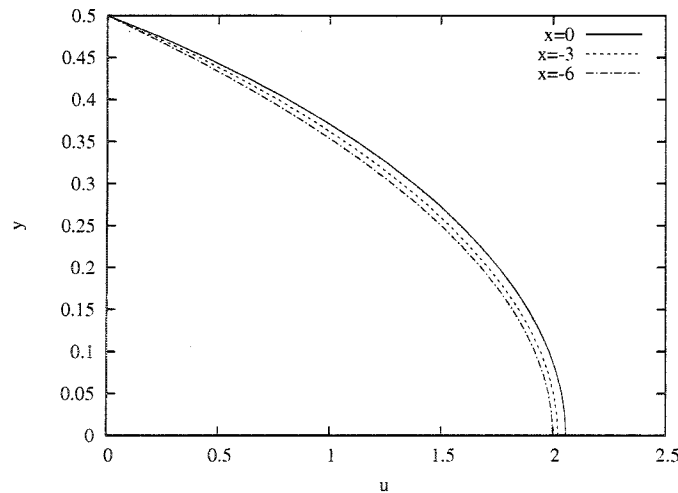


FIG. 6.9 Distribution de  $u$  le long du tube aux positions  $x = 0$ ,  $x = -3$  et  $x = -6$

#### 6.4 Comparaison mur chaud - mur froid

Dans cette section, nous allons comparer les résultats entre un jet chaud impactant sur un mur froid et un jet froid impactant sur un mur chaud. Les calculs sont tous effectués ici avec de l'air.

Le cas du mur chaud propose donc un jet à  $T_r = 300^\circ K$  impactant sur un mur à  $T_w = 600^\circ K$ . Dans la configuration inverse, on a  $T_r = 600^\circ K$  pour le jet, et  $T_w = 300^\circ K$  pour le mur. Le nombre de Mach de référence vaut 0.4 dans les deux cas.

La figure 6.10 montre les isovaleurs pour la vitesse, la pression et la température ( $u, v, p, T$ ) dans le cas du jet chaud sur le mur froid. Cette figure est à rapprocher de la figure 6.4, où il était question du jet froid impactant sur le mur chaud. Les différents contours sont très similaires dans leur comportement. On remarque néanmoins que le fluide s'éloigne plus rapidement du mur après l'impact dans le cas où l'air est froid et le mur chaud (figure 6.4). On peut noter aussi que, dans les deux calculs, la compressibilité provoque une hausse de température en amont du point de stagnation, même dans le cas où le mur est plus froid que le fluide.

La figure 6.11 présente la distribution radiale de  $Nu$  pour des murs chaud et froid. Le nombre de Nusselt au point de stagnation est plus important dans le cas du mur froid, mais diminue plus vite à mesure que l'on s'éloigne de l'axe de symétrie. Comme indiqué par Turgeon *et al* <sup>[30]</sup>, la compressibilité provoque une hausse de  $Nu$  dans les deux cas (jet froid et jet chaud).

La figure 6.12 présente la distribution du coefficient de friction  $C_f$  le long du mur, dans les deux cas. À cause de l'augmentation de la viscosité avec la température,  $C_f$  est plus important dans le cas du jet froid impactant sur le mur chaud.

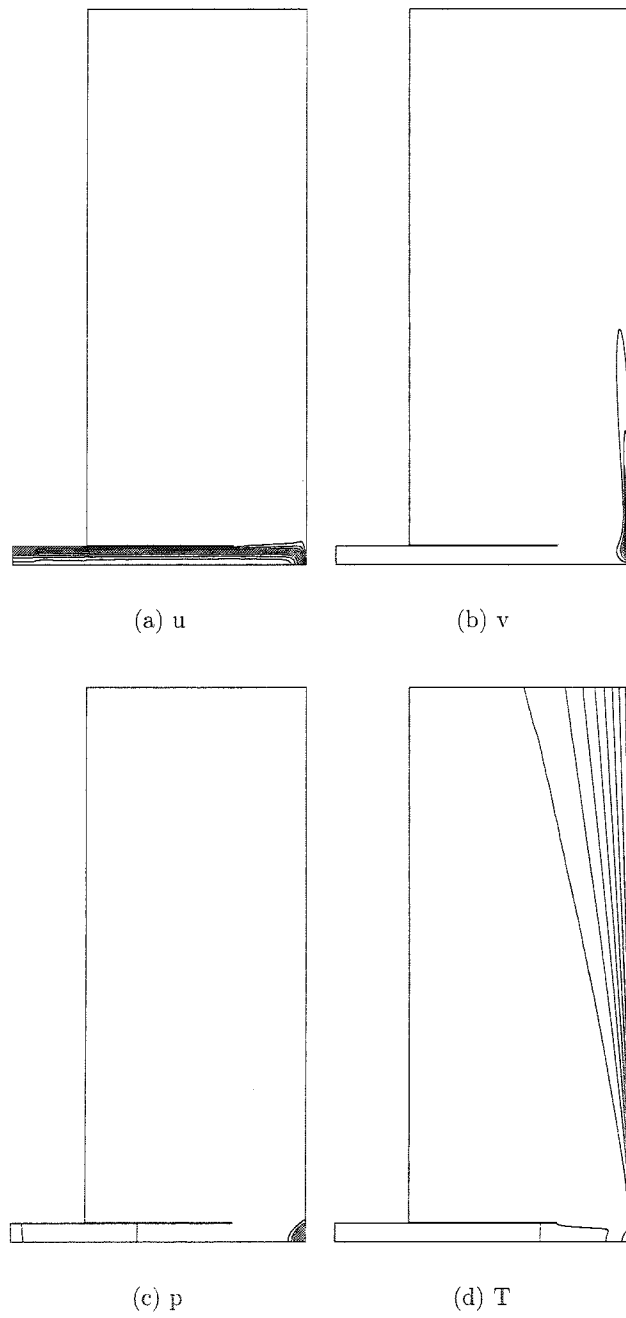


FIG. 6.10 Contours des variables d'écoulement (mur froid)

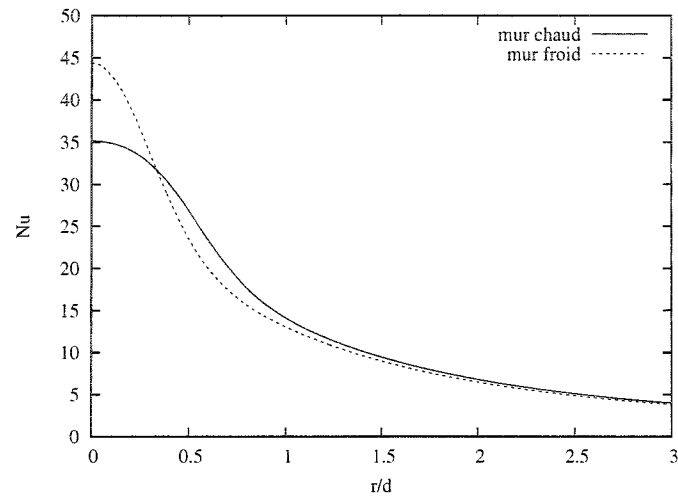


FIG. 6.11 Comparaison du nombre de Nusselt pour le mur froid et le mur chaud

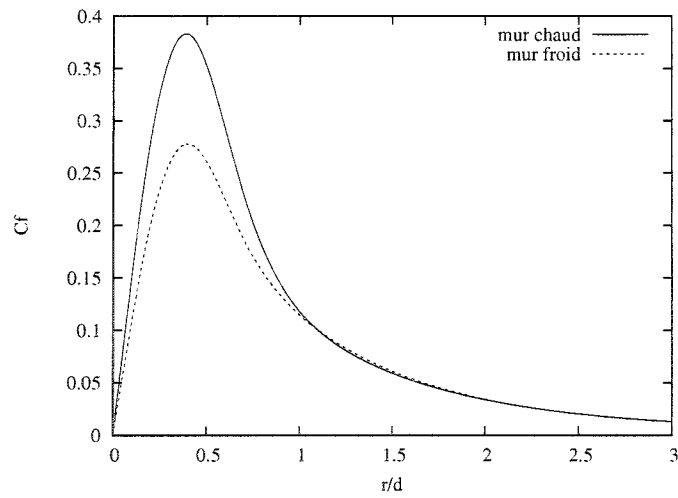


FIG. 6.12 Comparaison du coefficient de friction pour le mur froid et le mur chaud

### 6.5 Comparaison air - $\text{CO}_2$

Nous voyons ici le cas du dioxyde de carbone ( $\gamma_r = 1.288$ ). Les figures 6.13 et 6.14 montrent les distributions de  $Nu$  et de  $C_f$  dans le cas du mur froid et du

mur chaud. Les comportements de l'air et du  $\text{CO}_2$  sont différents dans le cas du nombre de Nusselt (figure 6.13). En effet, ici,  $Nu$  est plus important dans le cas du jet froid impactant sur le mur chaud. Le comportement du coefficient de friction  $C_f$ , visible sur la figure 6.14, est par contre similaire pour les deux gaz. Une fois encore, le maximum est plus élevé lorsque le mur est chaud.

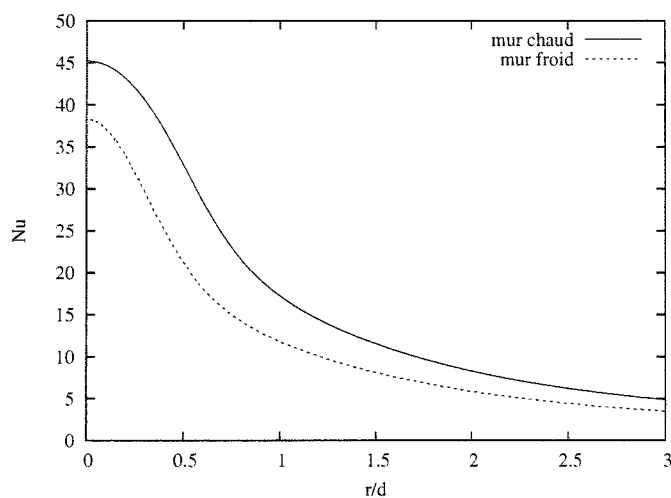


FIG. 6.13 Comparaison du nombre de Nusselt pour le mur froid et le mur chaud ( $\text{CO}_2$ )

## 6.6 Sensibilités

Nous allons tout d'abord nous intéresser aux exposants  $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$  comme paramètres d'étude. La figure 6.15 indique les variations de  $c_p$ ,  $\mu$  et  $\lambda$  en fonction de  $T$  pour les deux gaz considérés (air et  $\text{CO}_2$ ). Nous avons pris le cas du jet froid ( $T_r = 300^\circ\text{K}$ ), ainsi la plage de variation de  $T$  présentée sur la figure va de  $300^\circ\text{K}$  à  $600^\circ\text{K}$ .

Nous allons donc étudier l'effet d'une modification de l'un des exposants sur le com-

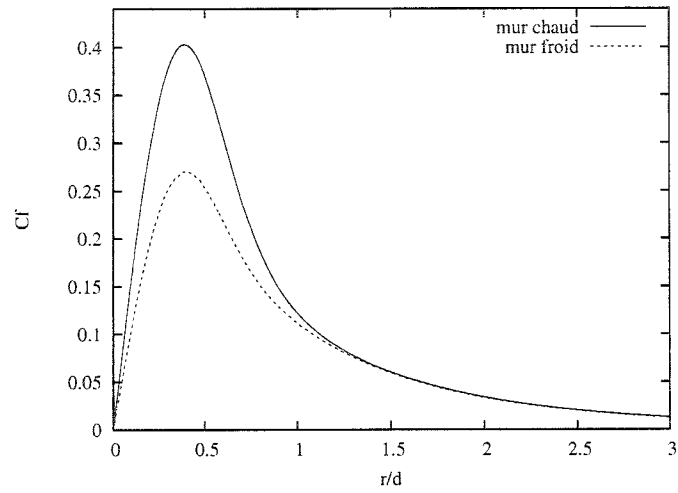


FIG. 6.14 Comparaison du coefficient de friction pour le mur froid et le mur chaud ( $\text{CO}_2$ )

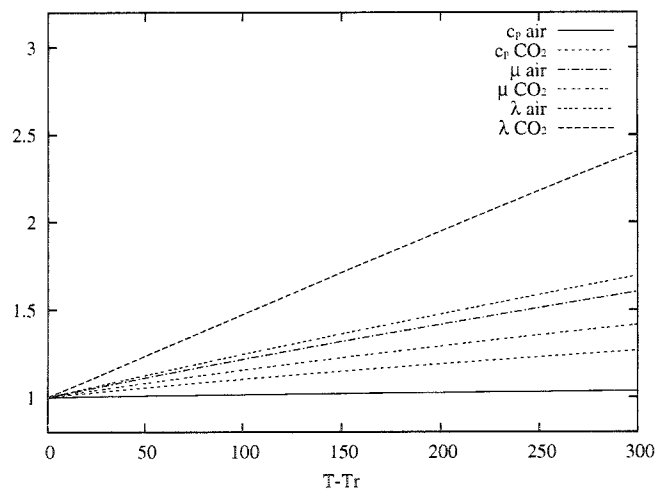


FIG. 6.15 Dépendance des propriétés vis-à-vis de la température

portement de l'écoulement. Nous partons de la solution présentée précédemment, à savoir le jet de gaz froid impactant sur le mur chaud.

### 6.6.1 Sensibilités par rapport à $A_{c_p}$

Une grande difficulté quant à l'explication physique des sensibilités par rapport à  $A_{c_p}$  vient du fait que  $c_p$  dépend à la fois de  $A_{c_p}$  et de  $T$  :  $c_p = c_p(T(A_{c_p}); A_{c_p})$ . Pour l'air :

$$c_p = (\beta_r T + 1)^{A_{c_p}} \quad (6.3)$$

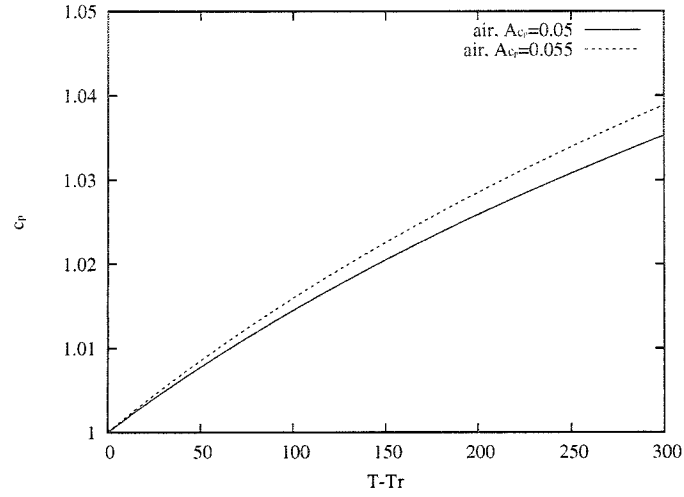
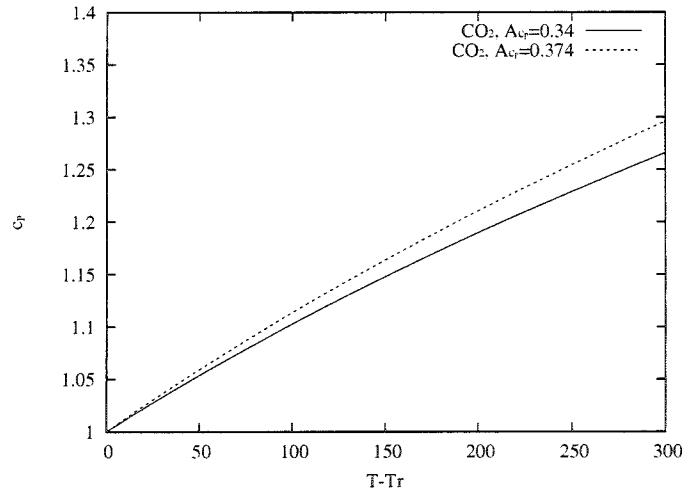
Ainsi, le calcul de la sensibilité de  $c_p$  par rapport à  $A_{c_p}$  fait apparaître, deux termes :

$$c'_p = A_{c_p} \beta_r s_T (\beta_r T + 1)^{A_{c_p}-1} + (\beta_r T + 1)^{A_{c_p}} \log(\beta_r T + 1) \quad (6.4)$$

où  $s_T$  est la sensibilité de  $T$  par rapport à  $A_{c_p}$  :  $s_T = \frac{\partial T}{\partial A_{c_p}}$ .

La présence de  $s_T$  peut compliquer l'interprétation de  $c'_p$ . Néanmoins, le raisonnement tenu par la suite peut donner une idée du comportement du fluide soumis à une modification de  $A_{c_p}$ .

Les figures 6.16 et 6.17 montrent l'allure de  $c_p$  pour deux valeurs différentes de  $A_{c_p}$ , tant pour l'air que pour le  $\text{CO}_2$ . La courbe pleine représente les valeurs de  $A_{c_p}$  correspondant aux expressions présentées plus tôt et la courbe en tireté correspond à une augmentation de 10% de cet exposant. On peut donc voir que lorsque  $A_{c_p}$  augmente,  $c_p$  augmente également. Ce coefficient indique la quantité de chaleur à fournir au fluide pour que sa température s'élève. Ainsi, lorsque  $A_{c_p}$  est plus important (et donc  $c_p$  aussi), on devrait avoir plus de mal à augmenter la température du fluide en le chauffant par l'intermédiaire du mur chaud. La température proche du mur devrait donc être plus faible. Il s'en suit que la sensibilité de  $T$  par rapport à  $A_{c_p}$  devrait être négative (puisque une augmentation de  $A_{c_p}$  induit une diminution de  $T$ ).

FIG. 6.16 Effet d'une variation de  $A_{c_p}$  sur  $c_p$  (air)FIG. 6.17 Effet d'une variation de  $A_{c_p}$  sur  $c_p$  ( $\text{CO}_2$ )

Ce résultat est confirmé à la figure 6.18 (pour l'air et le  $\text{CO}_2$ ). La forme de la sensibilité de  $T$  est bien celle attendue. La sensibilité est nulle sur le mur (puisque



la température est constante), puis diminue à mesure que l'on s'en éloigne. Elle atteint un minimum puis remonte vers zéro, en s'écartant du mur.

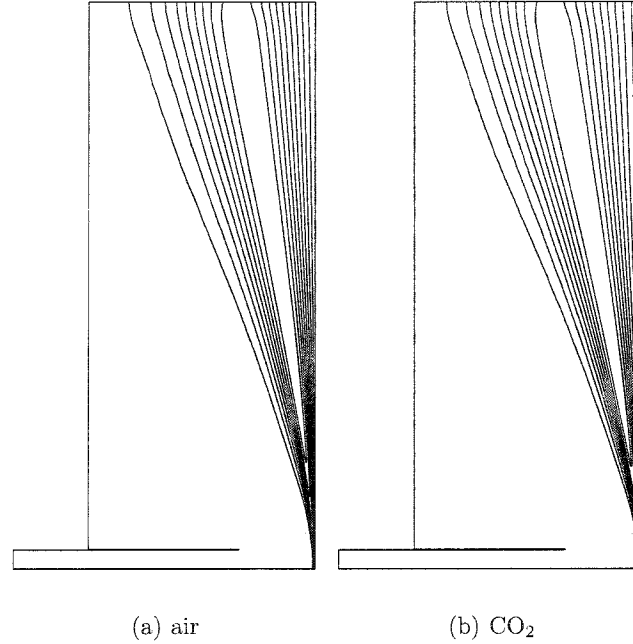
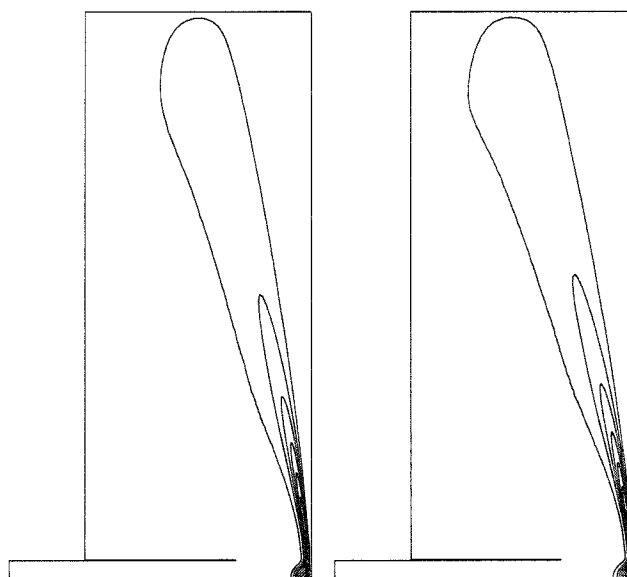


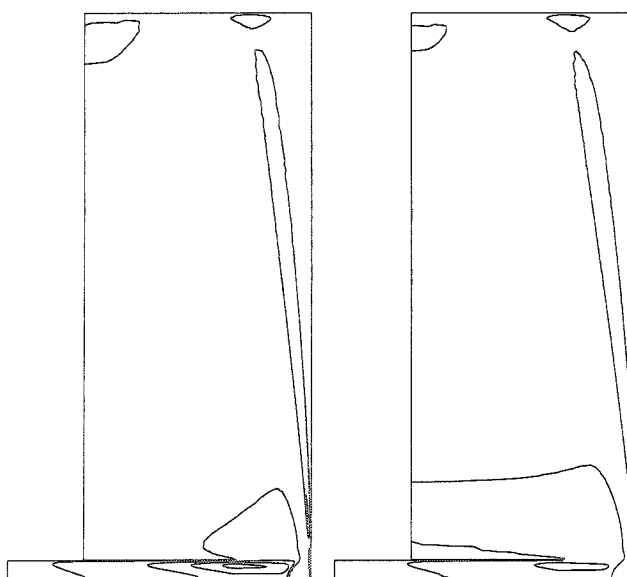
FIG. 6.18 Isovaleurs (négatives) de  $s_T^{A_{cp}}$

Tel qu'indiqué sur la figure 6.19, une augmentation de  $A_{cp}$  va accélérer le fluide à la sortie du tube, juste avant le mur. Très proche de ce dernier,  $s_u^{A_{cp}}$  est négatif (la zone est très petite sur la figure 6.19). Dans un même temps,  $s_v^{A_{cp}}$  va être négatif dans pratiquement tout le domaine, tel qu'indiqué sur la figure 6.20, sauf dans une région proche du mur (encore une fois, cette région est particulièrement mince, et correspond à la zone où  $s_u^{A_{cp}}$  est négatif).

La figure 6.21 montre que  $s_p^{A_{cp}}$  est principalement négatif autour du point de stagnation. La sensibilité est néanmoins positive dans une très petite zone proche du mur. La zone est trop réduite pour être visible sur la figure. On peut néanmoins



(a) air (valeurs positives)

(b) CO<sub>2</sub> (valeurs positives)

(c) air (valeurs négatives)

(d) CO<sub>2</sub> (valeurs négatives)FIG. 6.19 Isovaleurs de  $s_u^{A_{cp}}$

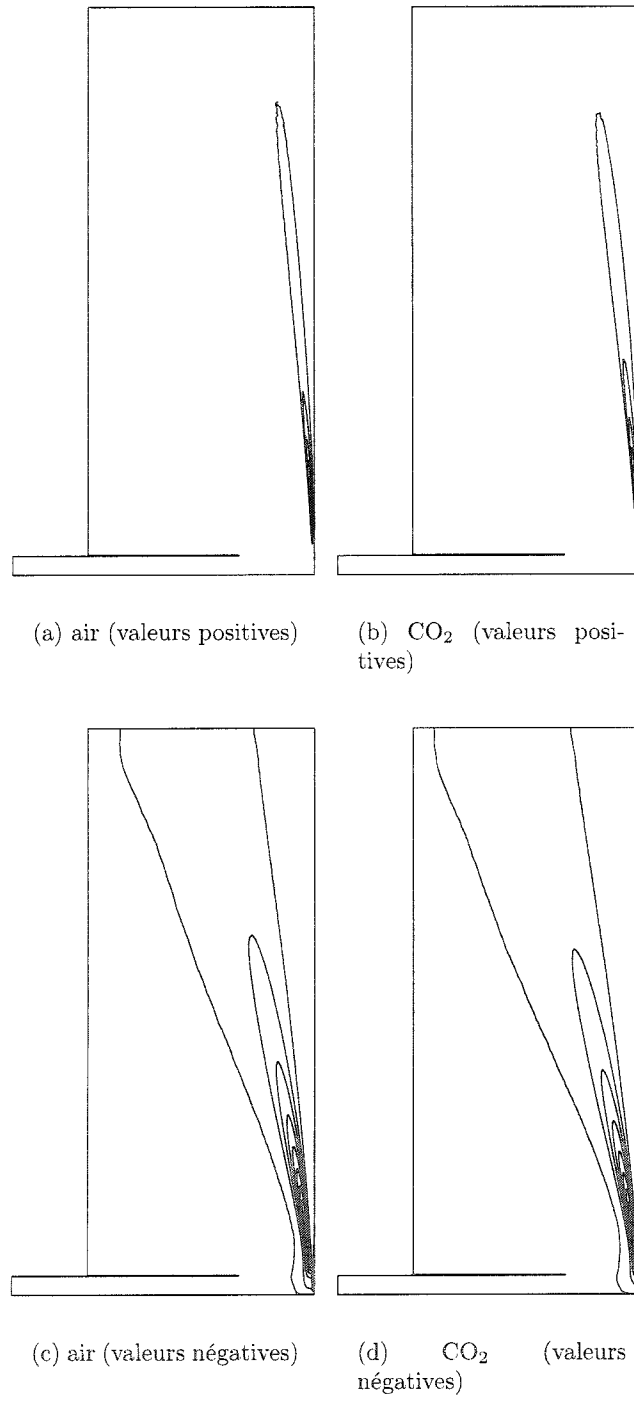


FIG. 6.20 Isovaleurs de  $s_v^{A_{cp}}$

voir sur la figure 6.22  $s_p^{A_{cp}}$  changer de signe le long de l'axe de symétrie entre les lèvres et le mur.

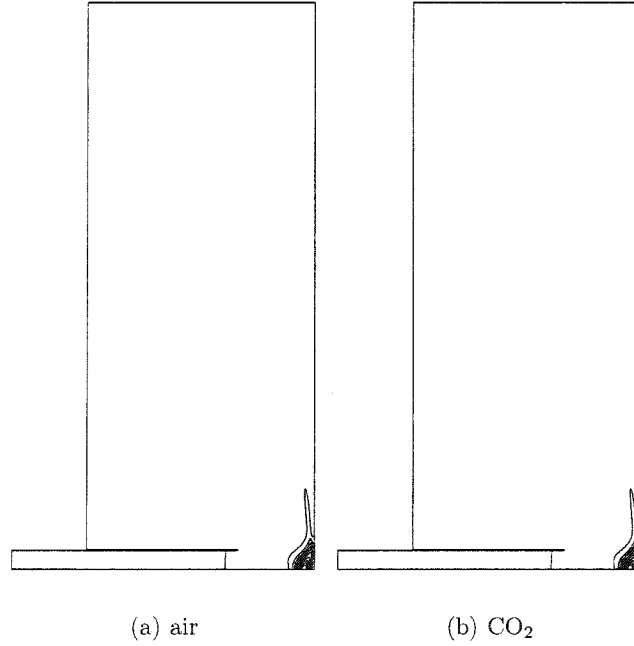


FIG. 6.21 Isovaleurs (négatives) de  $s_p^{A_{cp}}$

On peut remarquer que tous les contours sont très semblables pour l'air et le  $\text{CO}_2$ . Ceci est compréhensible puisque les formes des expressions de  $c_p$  sont très proches pour les deux types de gaz.

### 6.6.2 Sensibilités par rapport à $A_\mu$

Une augmentation de  $A_\mu$  provoque une hausse de la viscosité. Ceci est visible sur les figures 6.23 et 6.24. Les deux courbes présentes sur chaque figure sont tracées pour des valeurs de  $A_\mu$  distantes de 10% (la courbe pleine est la valeur initiale et

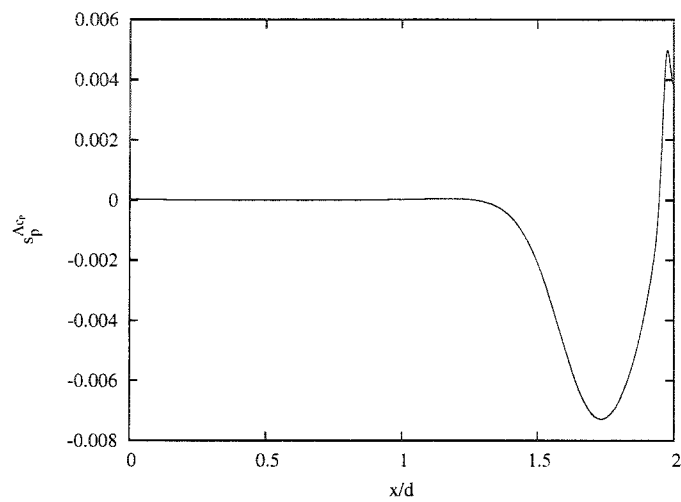


FIG. 6.22 Valeur de  $s_p^{A_{ep}}$  le long de l'axe de symétrie

celle en tireté correspond à une hausse de 10% de  $A_\mu$ ).

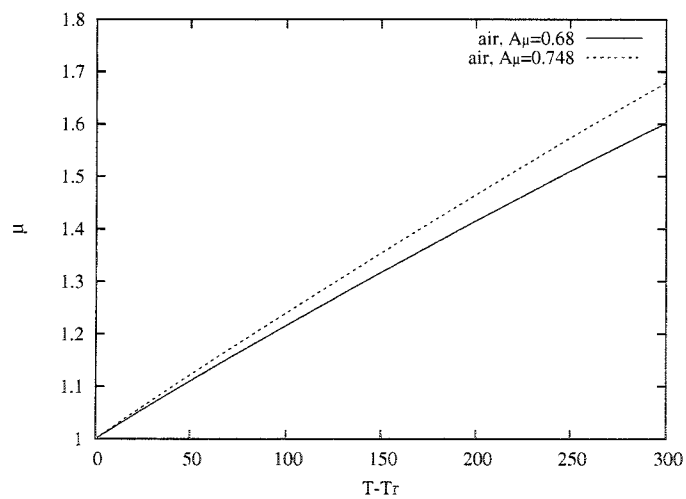


FIG. 6.23 Effet d'une variation de  $A_\mu$  sur  $\mu$  (air)

La figure 6.25 montre les contours de  $s_T^{A_\mu}$  dans le domaine. Ils sont semblables

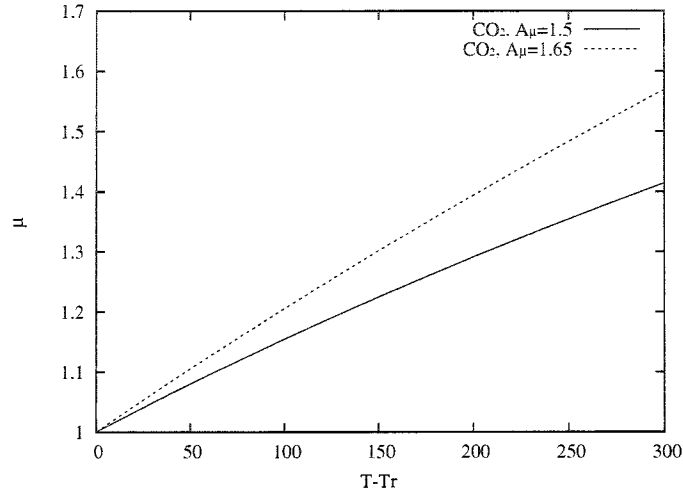


FIG. 6.24 Effet d'une variation de  $A_\mu$  sur  $\mu$  (CO<sub>2</sub>)

à ceux observés dans le paragraphe 6.6.1 pour  $S_T^{A_{cp}}$ . Seul le signe change. Les sensibilités sont ici positives. La ligne d'extremum (dans ce cas maximum) se situe au même endroit que précédemment. La sensibilité de  $T$  augmente en s'éloignant du mur, atteint ensuite son maximum puis diminue pour s'annuler loin du mur.

Ici encore, les contours de  $s_u^{A_\mu}$  et de  $s_v^{A_\mu}$  sont semblables, au signe près, à ceux présentés pour le paramètre  $A_{cp}$ . Cependant, on peut maintenant apercevoir plus facilement sur les figures 6.26 et 6.27 la zone où  $s_u^{A_\mu}$  et  $s_v^{A_\mu}$  changent de signe, à savoir la ligne oblique proche du mur. Lorsque  $A_\mu$  augmente, le fluide sera ralenti avant d'arriver sur le mur ( $s_u^{A_\mu}$  négatif en amont du point de stagnation). Il sera ensuite dévié vers le haut plus doucement ( $s_v^{A_\mu}$  négatif proche du mur).

Globalement, le comportement de la pression est identique, au signe près, au cas précédent du paragraphe 6.6.1. La figure 6.28 nous indique que  $p$  augmentera en amont du point de stagnation. Là encore, il existe une zone (très petite), proche de l'axe juste avant le mur, où  $s_p^{A_\mu}$  est négatif. Cette zone est visible sur la figure

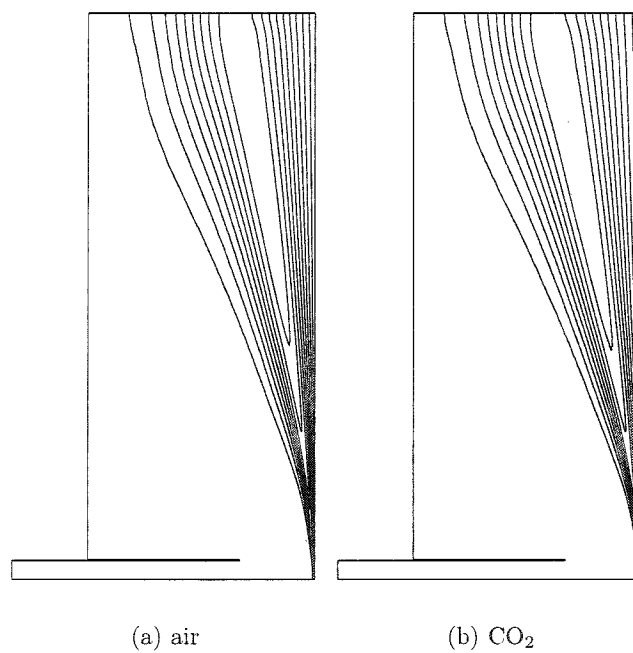
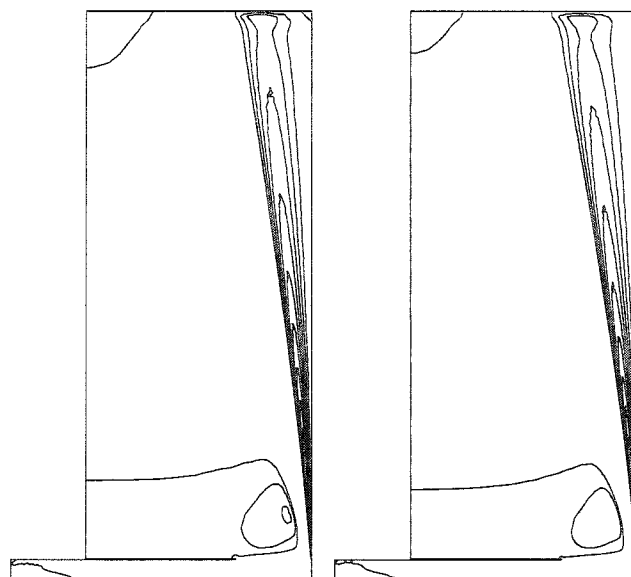
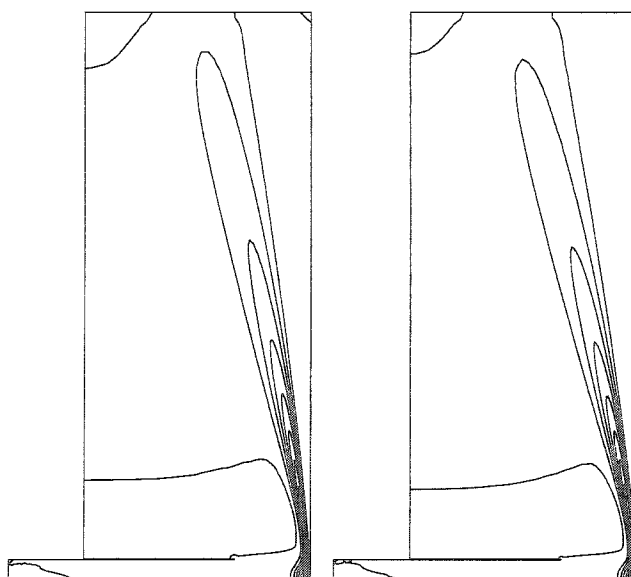


FIG. 6.25 Isovaleurs (positives) de  $s_T^{A\mu}$



(a) air (valeurs positives)

(b) CO<sub>2</sub> (valeurs positives)

(c) air (valeurs négatives)

(d) CO<sub>2</sub> (valeurs négatives)FIG. 6.26 Isovaleurs de  $s_u^{A\mu}$



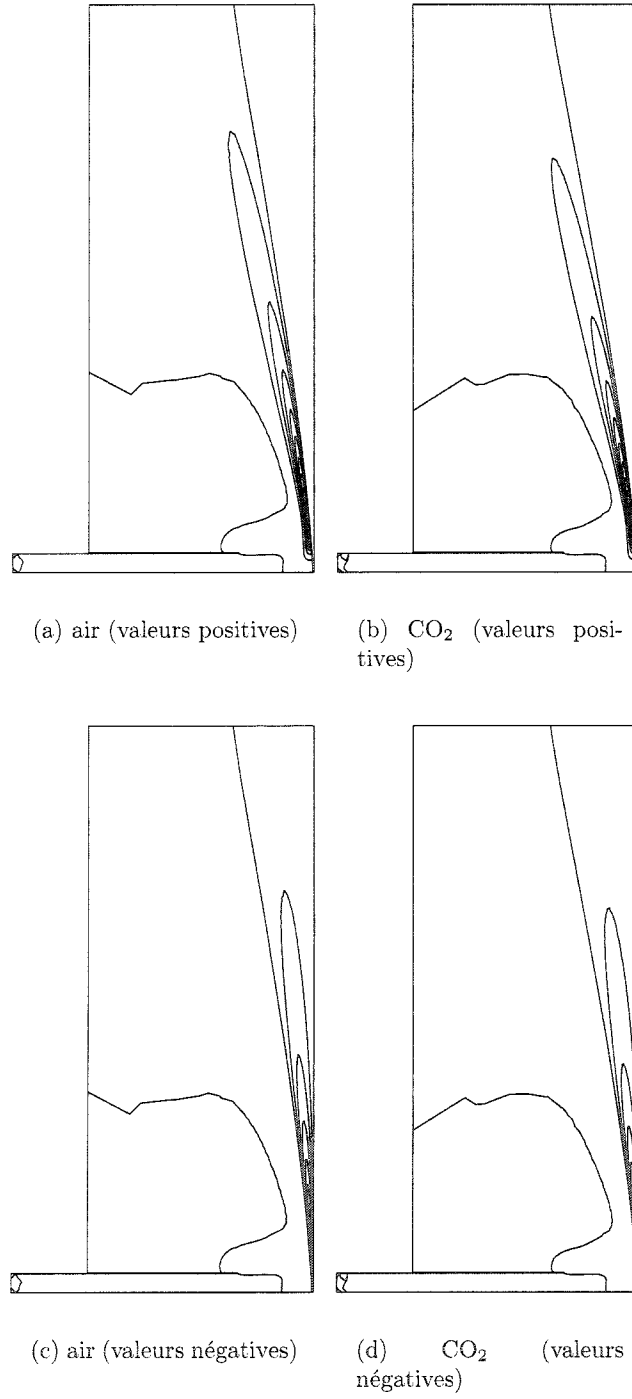
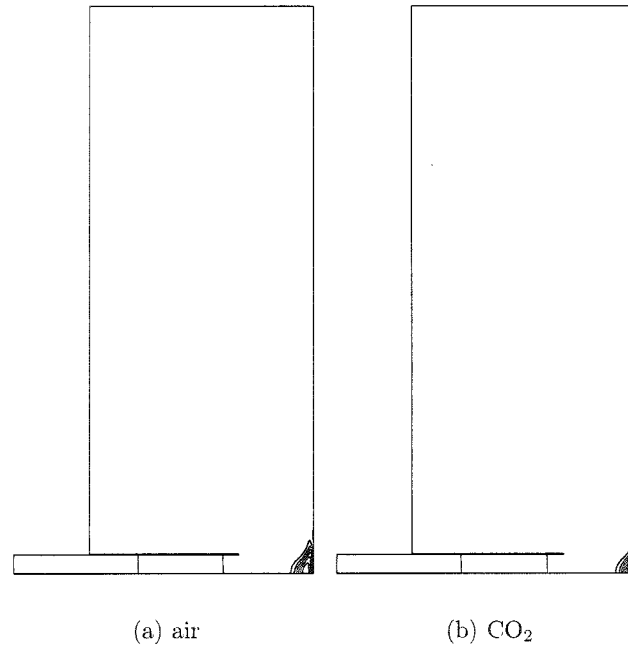


FIG. 6.27 Isovaleurs de  $s_v^{A\mu}$

6.29.

FIG. 6.28 Isovaleurs (positives) de  $s_p^{A_\mu}$ 

Remarquons encore une fois la très grande similitude entre les contours pour l'air et le CO<sub>2</sub>, même si les expressions de la viscosité pour les deux fluides (et donc le rôle *a priori* des exposants  $A_\mu$ ) semblent différentes.

### 6.6.3 Sensibilités par rapport à $A_\lambda$

Les figures 6.30 et 6.31 montrent le comportement de la conductivité de l'air et du CO<sub>2</sub> pour deux valeurs différentes de  $A_\lambda$ . Comme précédemment, les deux courbes sont à chaque fois distantes de 10%. On note donc que la conductivité augmente avec une hausse de l'exposant. Elle représente la quantité de chaleur transférée par

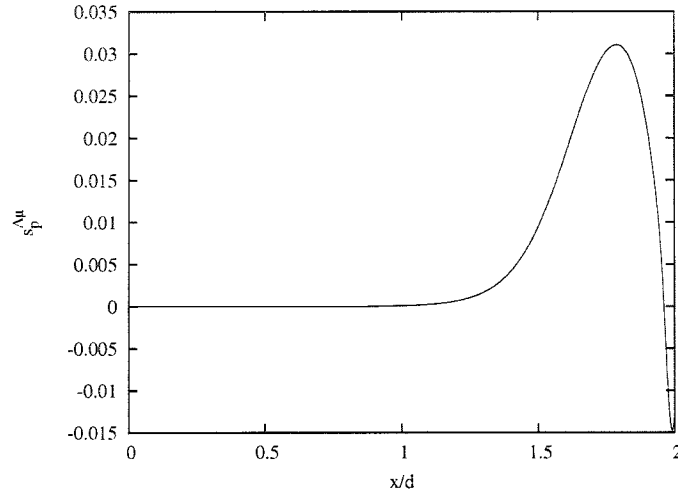
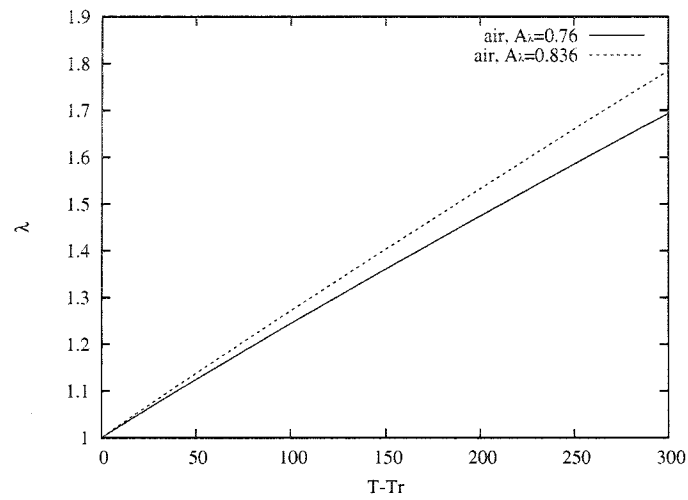
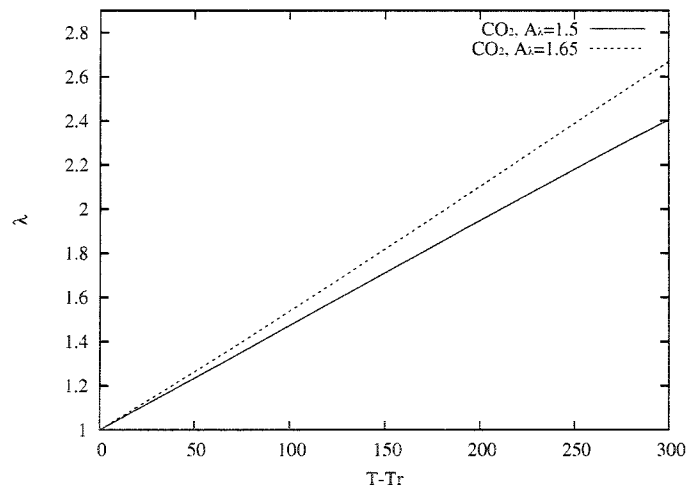


FIG. 6.29 Valeur de  $s_p^{A_\mu}$  le long de l'axe de symétrie

le fluide. Plus elle est élevée, plus il est facile de réchauffer le fluide (ou refroidir le mur). On s'attend donc à ce que la température du fluide augmente lorsque  $A_\lambda$  est plus important.

La figure 6.32 confirme notre raisonnement. Encore une fois, la forme de la sensibilité de  $T$  est très semblable à celles observées pour les autres paramètres. Elle est nulle sur le mur, puis présente un extremum (ici maximum) en s'éloignant un peu du mur. Puis elle retrouve une valeur nulle par la suite. Ainsi, comme prévu ci-dessus, une hausse de  $A_\lambda$  provoque une augmentation de  $T$  dans le domaine.

Les contours des sensibilités des composantes de la vitesse  $u$  (sur la figure 6.33) et  $v$  (sur la figure 6.34) sont quasiment identiques à ceux observés précédemment. Seuls les signes diffèrent entre les trois paramètres. Ainsi, dans le cas du paramètre  $A_\lambda$ , lorsque celui-ci est plus élevé, le fluide est ralenti avant d'arriver sur le mur ( $s_u^{A_\lambda}$  négatif). Dans la région proche du mur, il est dévié plus lentement ( $s_v^{A_\lambda}$  négatif), alors qu'un peu plus loin du mur,  $v$  sera plus important ( $s_v^{A_\lambda}$  positif).

FIG. 6.30 Effet d'une variation de  $A_\lambda$  sur  $\lambda$  (air)FIG. 6.31 Effet d'une variation de  $A_\lambda$  sur  $\lambda$  ( $\text{CO}_2$ )

La sensibilité de la pression, visible sur la figure 6.35, se présente encore de la même manière. Tout comme pour le paramètre  $A_\mu$ , une hausse de  $A_\lambda$  va induire

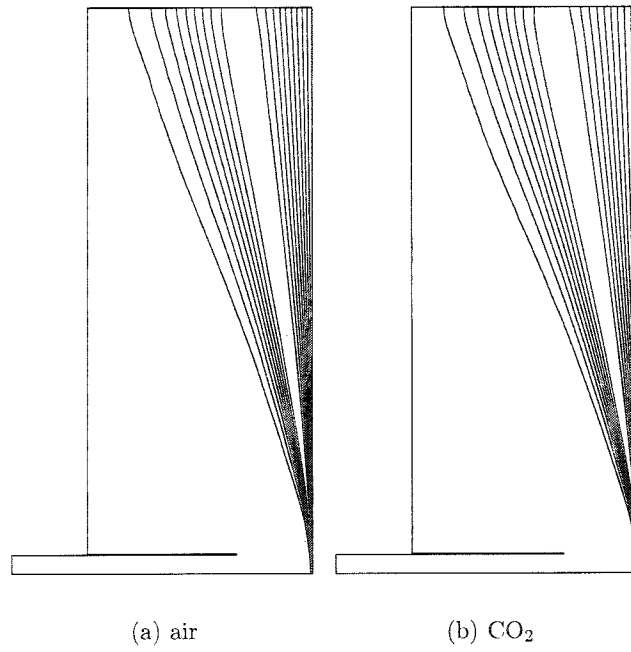
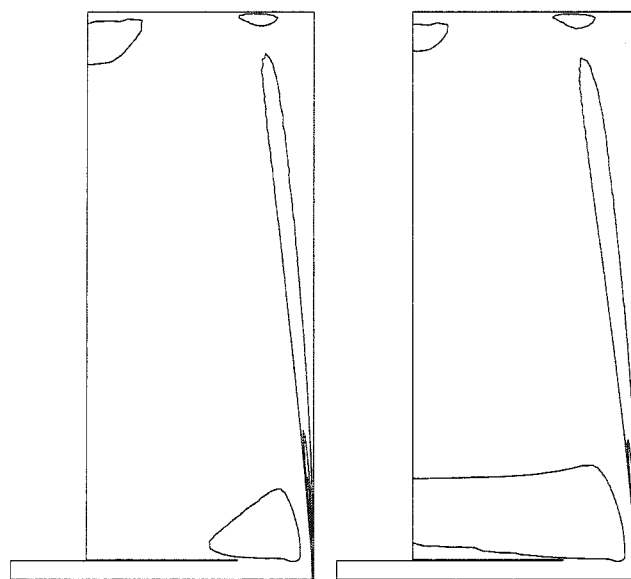
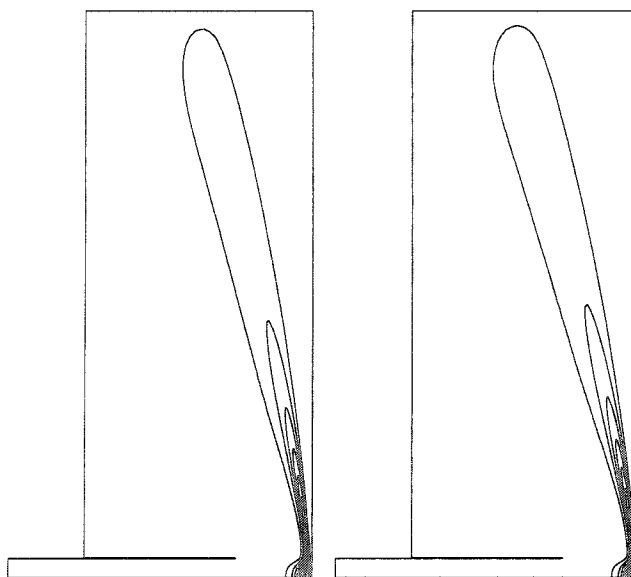


FIG. 6.32 Isovaleurs (positives) de  $s_T^{A_\lambda}$

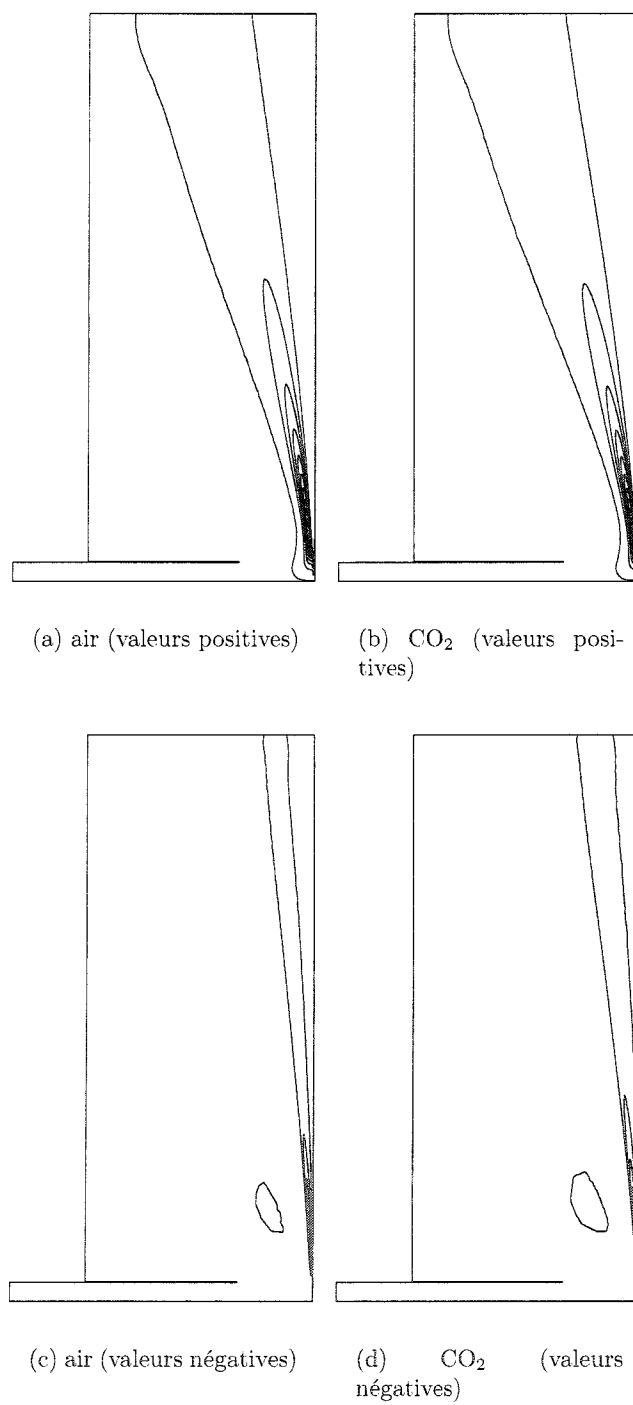


(a) air (valeurs positives)

(b) CO<sub>2</sub> (valeurs positives)

(c) air (valeurs négatives)

(d) CO<sub>2</sub> (valeurs négatives)FIG. 6.33 Isovaleurs de  $s_u^{A\lambda}$

FIG. 6.34 Isovaleurs de  $s_v^{A\lambda}$

une augmentation de pression en amont du point de stagnation. Là encore, il existe une région où  $s_p^{A_\lambda}$  est négatif. Elle est très réduite, comme l'indique la figure 6.36.

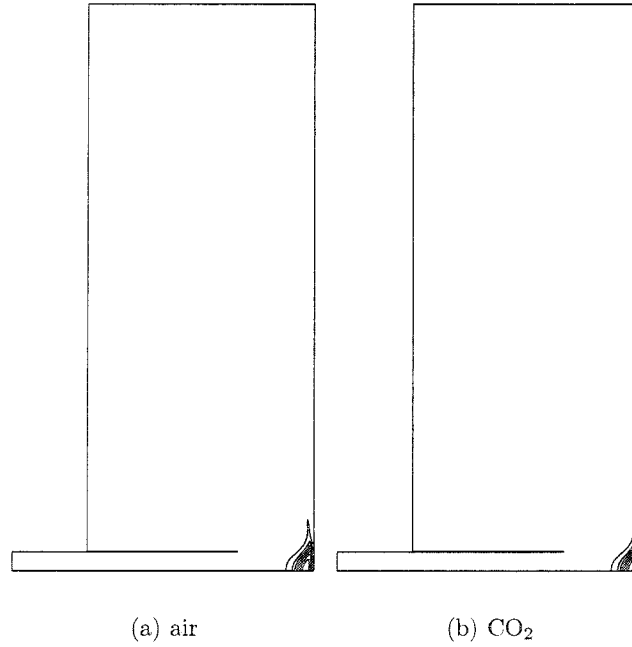


FIG. 6.35 Isovaleurs (positives) de  $s_p^{A_\lambda}$

Les différentes courbes des deux gaz sont encore une fois très similaires. Ceci justifie *a posteriori* le choix de nos paramètres d'étude entre l'air et le CO<sub>2</sub>.

#### 6.6.4 Conclusion

Nous avons vu que le fluide présentait des comportements similaires (au signe près) face au trois paramètres d'étude ( $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$ ). Nous allons voir maintenant, à l'aide des sensibilités normalisées, si l'écoulement est plus sensible à l'un ou à l'autre de ces paramètres.



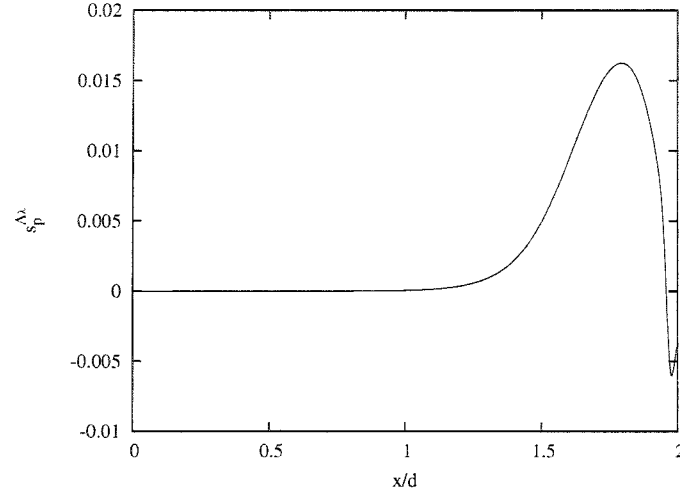


FIG. 6.36 Valeur de  $s_p^{A_\lambda}$  le long de l'axe de symétrie

## 6.7 Sensibilités normalisées

Les sensibilités normalisées permettent de comparer plusieurs sensibilités entre elles afin de déterminer le ou les paramètres dominants dans une simulation. Une comparaison est possible et rigoureuse car ces sensibilités normalisées ont toutes les mêmes unités.

Ainsi, la sensibilité normalisée du nombre de Nusselt  $Nu$  par rapport à un paramètre  $a$  s'écrit :

$$\tilde{s}_{Nu}^a = a_0 \frac{\partial Nu}{\partial a} \quad (6.5)$$

$a_0$  est la valeur nominale du paramètre. Le tilde dénote une quantité normalisée.

Ainsi, en utilisant nos trois paramètres d'étude précédents  $A_{cp}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$  :

$$\tilde{s}_{Nu}^{A_{cp}} = A_{cp0} \frac{\partial Nu}{\partial A_{cp}} \quad (6.6)$$

$$\tilde{s}_{Nu}^{A_\mu} = A_{\mu0} \frac{\partial Nu}{\partial A_\mu} \quad (6.7)$$

$$\tilde{s}_{Nu}^{A_\lambda} = A_{\lambda0} \frac{\partial Nu}{\partial A_\lambda} \quad (6.8)$$

Les résultats sont présentés sur les figures 6.37 à 6.40, avec dans l'ordre des figures :

- le jet d'air froid sur le mur chaud
- le jet d'air chaud sur le mur froid
- le jet de  $\text{CO}_2$  froid sur le mur chaud
- le jet de  $\text{CO}_2$  chaud sur le mur froid

Pour pouvoir comparer, on a tracé la valeur absolue de chaque sensibilité.

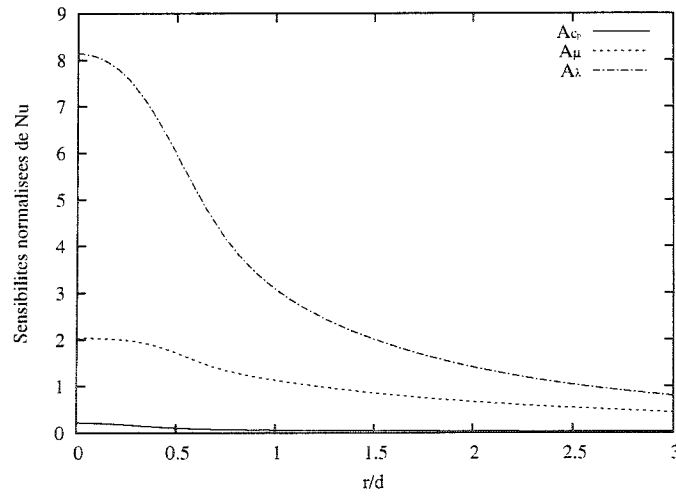


FIG. 6.37 Sensibilité normalisée de  $Nu$  pour un jet d'air froid sur mur chaud

On peut voir que dans tous les cas, le paramètre  $A_{cp}$  est celui qui a le moins d'effet sur  $Nu$ .  $A_\lambda$  est de loin le paramètre dominant dans tous les cas. D'une manière

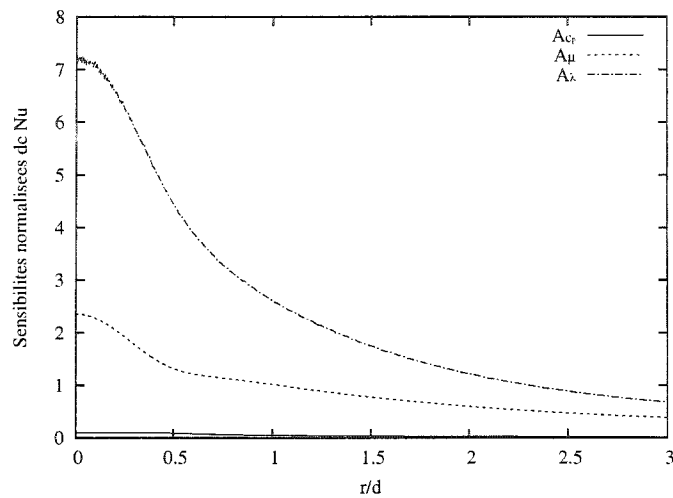


FIG. 6.38 Sensibilité normalisée de  $Nu$  pour un jet d'air chaud sur mur froid

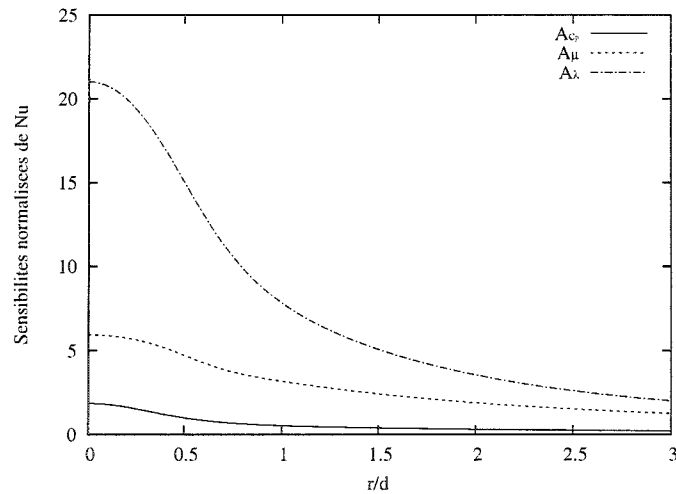


FIG. 6.39 Sensibilité normalisée de  $Nu$  pour un jet de  $\text{CO}_2$  froid sur mur chaud

générale, les différents paramètres ont un effet plus important dans le cas du  $\text{CO}_2$  que dans le cas de l'air (les sensibilités normalisées sont pratiquement trois fois supérieures). En comparant les cas du mur chaud et du mur froid pour chaque gaz

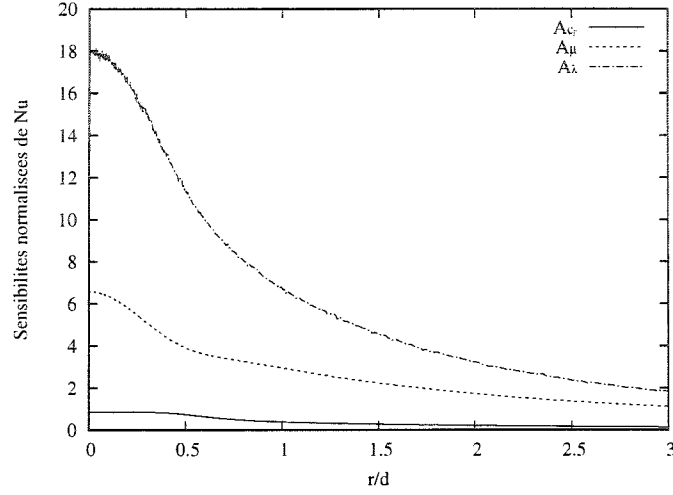


FIG. 6.40 Sensibilité normalisée de  $Nu$  pour un jet de  $\text{CO}_2$  chaud sur mur froid

(figures 6.37 et 6.38 pour l'air et figures 6.39 et 6.40 pour le  $\text{CO}_2$ ), on remarque que  $A_\lambda$  a un effet plus important dans le cas du jet froid sur le mur chaud. Pour le paramètre  $A_\mu$ , on observe le comportement inverse :  $\tilde{s}_{Nu}^{A_\mu}$  est plus faible dans le cas du jet froid sur le mur chaud. Enfin,  $A_{c_p}$  a un effet très faible sur le nombre de Nusselt.

On peut expliquer le fait que le paramètre  $A_\lambda$  soit celui qui a la plus d'influence sur le nombre de Nusselt. En effet, on écrit :

$$Nu = \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w$$

et nous avons vu que nous avons également :

$$\lambda = \lambda(T; A_\lambda)$$

La conductivité ne dépend pas directement des autres paramètres  $A_{c_p}$  et  $A_\mu$  (ce

qui est quand même le cas indirectement, par le biais de  $T$ ). Ainsi,  $\lambda'_{A_\lambda}$  comprend un terme supplémentaire que  $\lambda'_{A_{c_p}}$  et  $\lambda'_{A_\mu}$  ne possèdent pas :

$$\lambda'_{A_\lambda} = s_T^{A_\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial T} + \frac{\partial \lambda}{\partial A_\lambda}$$

C'est ce deuxième terme qui provoque le grand écart visible sur les figures 6.37 à 6.40 entre les effets de  $A_\lambda$ , et ceux de  $A_{c_p}$  et  $A_\mu$ .

Nous reprenons ensuite la même démarche pour le coefficient de friction  $C_f$ . Les courbes 6.41 à 6.44 montrent les résultats obtenus. L'ordre des cas est le même que le précédent, à savoir :

- le jet d'air froid sur le mur chaud
- le jet d'air chaud sur le mur froid
- le jet de  $\text{CO}_2$  froid sur le mur chaud
- le jet de  $\text{CO}_2$  chaud sur le mur froid

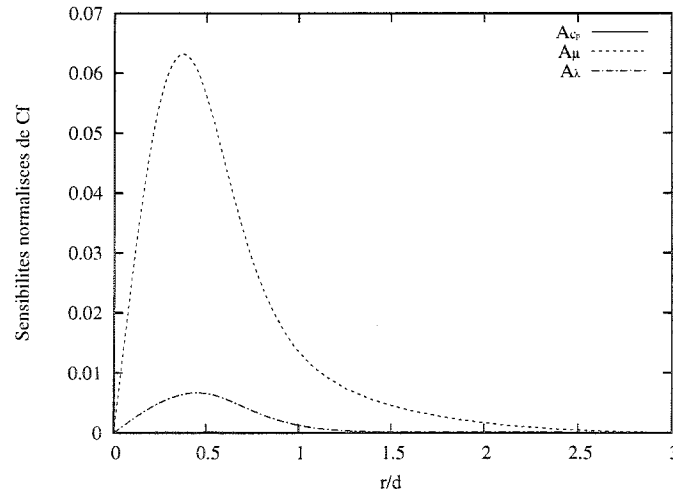


FIG. 6.41 Sensibilité normalisée de  $C_f$  pour un jet d'air froid sur mur chaud

On constate (sans trop d'étonnement) que le paramètre  $A_\mu$  est celui qui a le plus

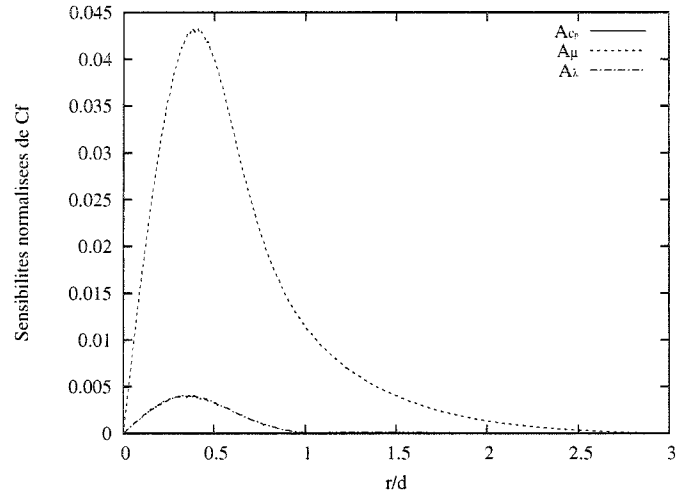


FIG. 6.42 Sensibilité normalisée de  $C_f$  pour un jet d'air chaud sur mur froid

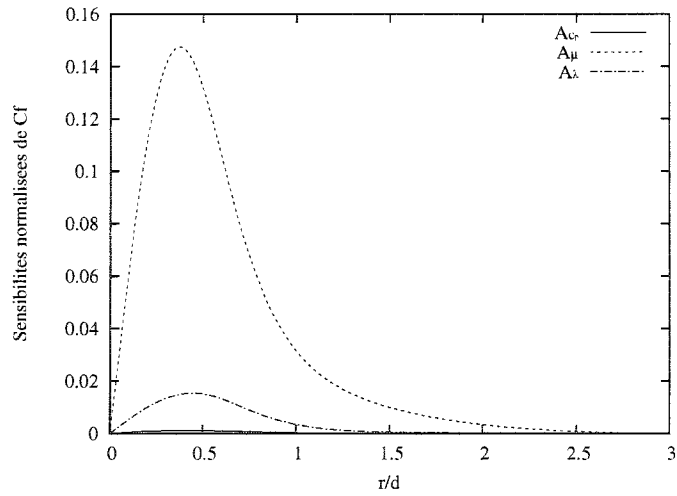


FIG. 6.43 Sensibilité normalisée de  $C_f$  pour un jet de  $\text{CO}_2$  froid sur mur chaud

grand effet sur  $C_f$ . Ici aussi, les sensibilités sont plus importantes pour le  $\text{CO}_2$  que pour l'air (environ deux fois plus importantes). Le coefficient  $A_{c_p}$  n'a pratiquement

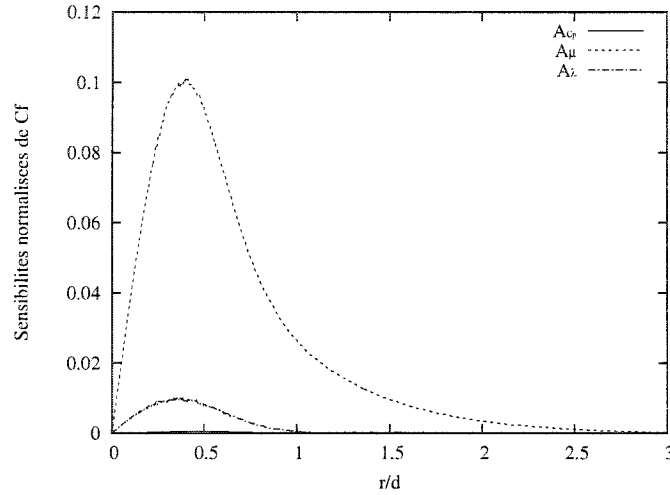


FIG. 6.44 Sensibilité normalisée de  $C_f$  pour un jet de  $\text{CO}_2$  chaud sur mur froid

pas d'effet par rapport aux autres paramètres. L'effet de  $A_\lambda$  est très légèrement supérieur dans le cas du jet froid sur le mur chaud, pour l'air et le  $\text{CO}_2$ .  $\tilde{s}_{C_f}^{A_\mu}$  est plus important d'environ 50% lorsque le mur est chaud, par rapport au mur froid.

Cette fois encore, l'explication sur l'ordre des courbes est la même. En effet,  $C_f$  s'écrit :

$$C_f = -2 \frac{\mu_w}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w$$

$\mu$  dépend à la fois de  $T$  et de  $A_\mu$ . La sensibilité de la viscosité par rapport à  $A_\mu$  présentera donc un terme supplémentaire que les sensibilités par rapport à  $A_{c_p}$  et  $A_\lambda$  :

$$\mu'_{A_\mu} = s_T^{A_\mu} \frac{\partial \mu}{\partial T} + \frac{\partial \mu}{\partial A_\mu}$$

Ici aussi, ce deuxième terme fait que  $A_\mu$  a une plus grande influence sur  $C_f$  que les

autres paramètres.

## 6.8 Analyse d'incertitude

Il existe dans toute expérience une incertitude correspondant à une manipulation humaine ou bien encore relative à la précision des appareils de mesure utilisés. On peut ainsi se demander dans quelle mesure les valeurs des exposants  $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$  donnés dans les expressions de  $c_p$ ,  $\mu$  et  $\lambda$  sont exactes, et quelle en est alors la répercussion sur le nombre de Nusselt et le coefficient de friction.

Nous nous baserons sur les calculs effectués pour le jet froid impactant sur le mur chaud. Nous traiterons le cas de l'air et du  $\text{CO}_2$ .

### 6.8.1 Jet d'air froid impactant sur un mur chaud

Les figures 6.45, 6.46 et 6.47 présentent le nombre de Nusselt (courbe pleine) ainsi que l'incertitude sur  $Nu$  (courbes en tireté) résultant d'une incertitude de 20% sur les valeurs nominales des différents paramètres ( $A_{c_p}$  sur la figure 6.45,  $A_\mu$  sur la figure 6.46 et  $A_\lambda$  sur la figure 6.47).

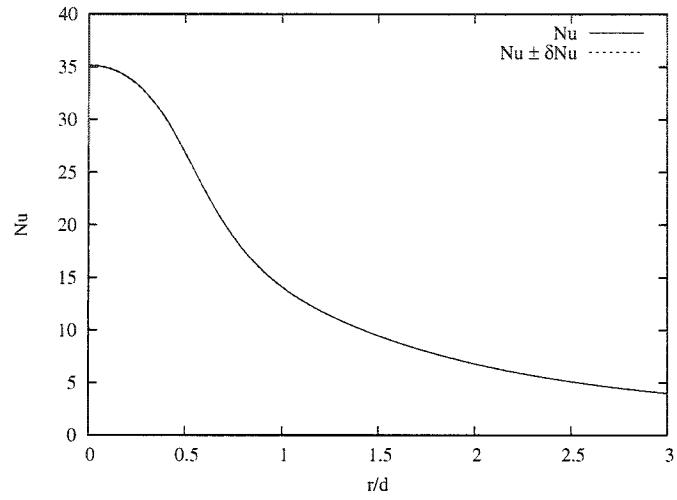
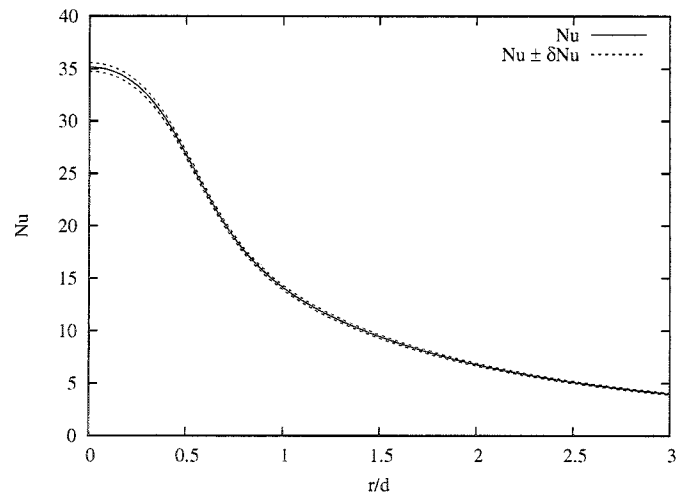
Nous ne considérons pour l'instant qu'un seul paramètre à la fois, et l'incertitude de 20% sur ces paramètres (notés ici de manière générale  $A$ ) s'écrit donc en fonction de la valeur nominale  $A_0$  :

$$\delta A = 0.2A_0$$

L'incertitude sur  $Nu$  est délimitée par les courbes  $Nu \pm \delta Nu$  avec  $\delta Nu = \frac{\partial Nu}{\partial A} \delta A$ .

Comme on pourrait s'y attendre, au vue des remarques faites dans la section



FIG. 6.45 Incertitude sur  $Nu$  (air, paramètre  $A_{cp}$ )FIG. 6.46 Incertitude sur  $Nu$  (air, paramètre  $A_\mu$ )

précédente, l'incertitude est la plus grande pour le paramètre  $A_\lambda$ . Elle est beaucoup plus faible pour  $A_\mu$  et quasiment nulle pour  $A_{cp}$ . Enfin, remarquons qu'elle est

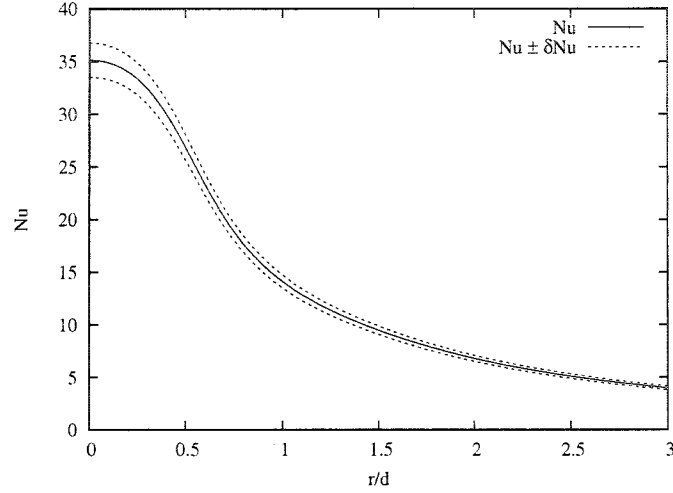
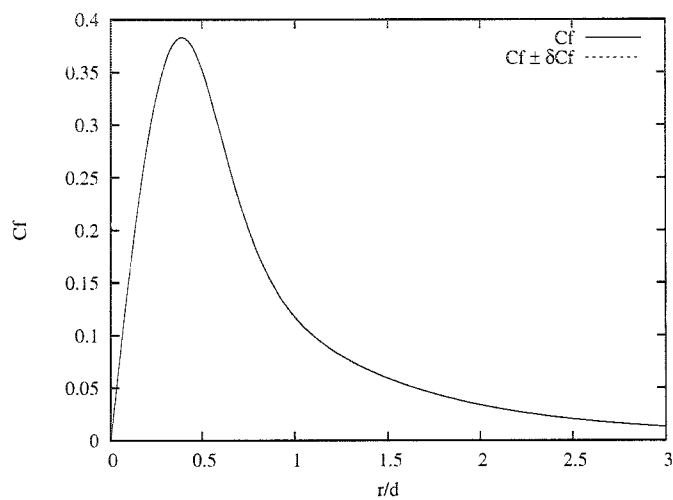
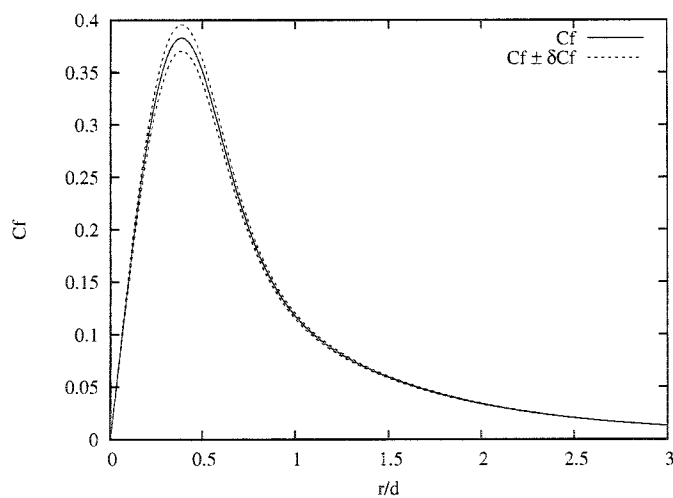


FIG. 6.47 Incertitude sur  $Nu$  (air, paramètre  $A_\lambda$ )

maximale au point de stagnation, et qu'elle diminue rapidement avec la distance radiale.

Les courbes des figures 6.48, 6.49 et 6.50 montrent l'incertitude sur le coefficient de friction pour une même incertitude de 20% sur les paramètres  $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$ . Les courbes en tireté représentent donc  $C_f \pm \delta C_f$ , avec  $\delta C_f = \frac{\partial C_f}{\partial A} \delta A$ . L'incertitude de 20% sur un paramètre  $A$  s'écrit encore  $\delta A = 0.2A_0$ .

Cette fois, l'incertitude provenant de  $A_\mu$  est la plus importante (pour les mêmes raisons évoquées précédemment, à savoir que  $C_f$  est plus sensible à  $A_\mu$  qu'aux autres paramètres). L'incertitude face aux paramètres  $A_{c_p}$  (figure 6.48) et  $A_\lambda$  (figure 6.50) n'est presque pas visible. On note enfin qu'elle est la plus importante au maximum de la courbe.

FIG. 6.48 Incertitude sur  $C_f$  (air, paramètre  $A_{cp}$ )FIG. 6.49 Incertitude sur  $C_f$  (air, paramètre  $A_\mu$ )

### 6.8.2 Jet de $\text{CO}_2$ froid impactant sur un mur chaud

On procède ici à la même démarche que pour l'air. On étudie donc l'incertitude du nombre de Nusselt et du coefficient de friction résultant d'une incertitude de 20%

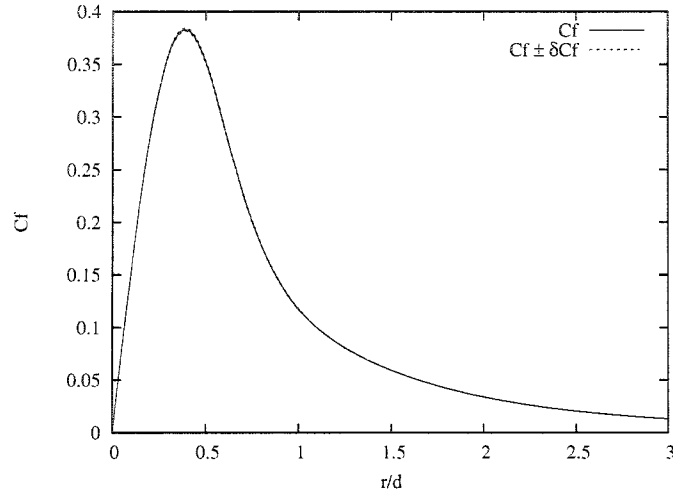


FIG. 6.50 Incertitude sur  $C_f$  (air, paramètre  $A_\lambda$ )

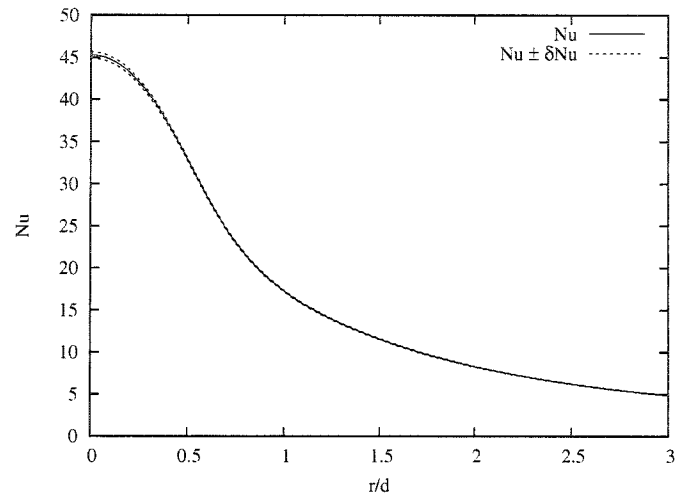
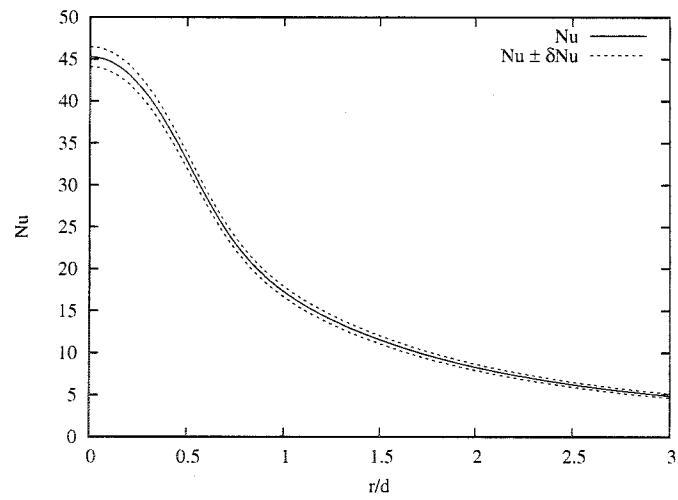
sur les valeurs nominales des paramètres  $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$ .

Les figures 6.51, 6.52 et 6.53 montrent les résultats pour le nombre de Nusselt. Encore une fois, elle est maximale pour le paramètre  $A_\lambda$ . Cependant, puisque les sensibilités sont globalement plus importantes pour le  $\text{CO}_2$  que pour l'air, on peut cette fois observer l'incertitude pour  $A_\mu$  et même légèrement pour  $A_{c_p}$ .

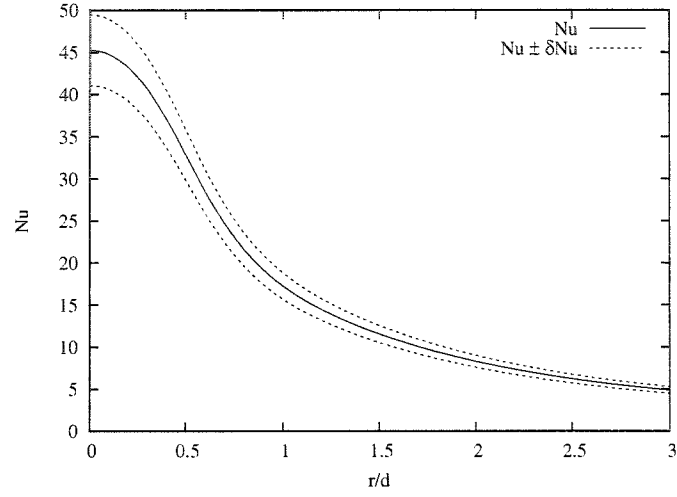
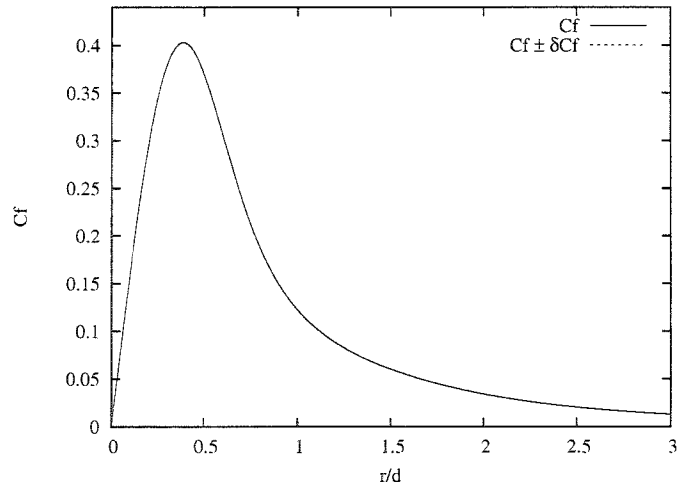
Le comportement est identique à celui observé pour l'air. L'incertitude est maximale au point de stagnation, et diminue par la suite.

Les figures 6.54, 6.55 et 6.56 présentent les résultats pour le coefficient de friction du  $\text{CO}_2$ .

On retrouve ce que l'on avait observé pour le jet d'air.  $A_\mu$  est le paramètre induisant la plus grande incertitude. Les incertitudes produites par  $A_{c_p}$  et  $A_\lambda$  sont faibles et sont presque invisibles sur les courbes. Le maximum d'incertitude est présent à l'endroit où les sensibilités étaient maximales, à savoir au maximum du coefficient

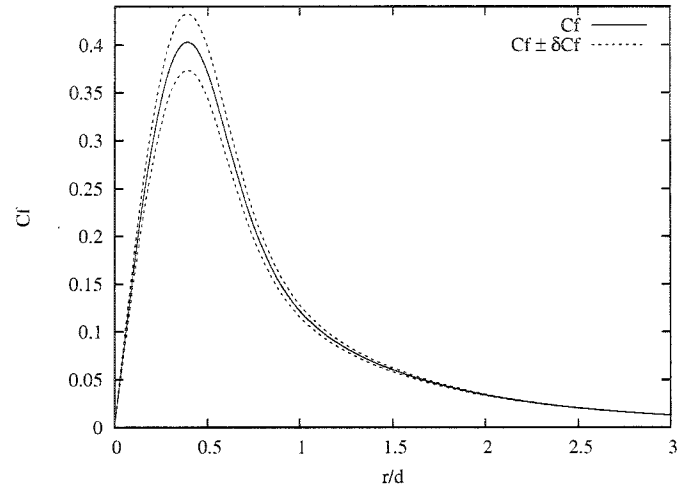
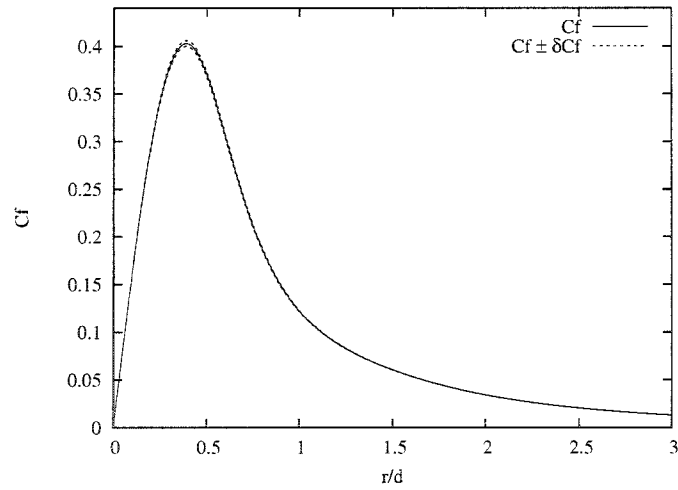
FIG. 6.51 Incertitude sur  $Nu$  ( $\text{CO}_2$ , paramètre  $A_{cp}$ )FIG. 6.52 Incertitude sur  $Nu$  ( $\text{CO}_2$ , paramètre  $A_\mu$ )

de friction.

FIG. 6.53 Incertitude sur  $Nu$  ( $\text{CO}_2$ , paramètre  $A_\lambda$ )FIG. 6.54 Incertitude sur  $C_f$  ( $\text{CO}_2$ , paramètre  $A_{c_p}$ )

### 6.8.3 Analyse d'incertitude sur $A_{c_p}$ , $A_\mu$ et $A_\lambda$ simultanément

Jusqu'à maintenant, nous avons pris les paramètres les uns après les autres pour notre analyse d'incertitude. Nous avons également pris une incertitude sur ces

FIG. 6.55 Incertitude sur  $C_f$  ( $\text{CO}_2$ , paramètre  $A_\mu$ )FIG. 6.56 Incertitude sur  $C_f$  ( $\text{CO}_2$ , paramètre  $A_\lambda$ )

paramètres importante (20%). Ceci nous a permis de voir le comportement des coefficients  $Nu$  et  $C_f$  par rapport à chacun des paramètres. Cependant, d'un point

de vue statistique, la variance doit être petite devant la valeur moyenne (on doit ainsi avoir  $\sigma_A \ll \bar{A}$  pour un paramètre  $A$  donné). 20% est une valeur importante, c'est pourquoi nous prenons ici une variation de 10% sur chacun des paramètres qui sont traités de manière simultanée.

Nous écrivons donc l'incertitude sur  $Nu$  suivante :

$$\delta Nu = \sqrt{\left(\frac{\partial Nu}{\partial A_{cp}} \delta A_{cp}\right)^2 + \left(\frac{\partial Nu}{\partial A_\mu} \delta A_\mu\right)^2 + \left(\frac{\partial Nu}{\partial A_\lambda} \delta A_\lambda\right)^2} \quad (6.9)$$

où l'incertitude sur les paramètres d'étude ( $\delta A_{cp}$ ,  $\delta A_\mu$  et  $\delta A_\lambda$ ) est fixée à 10%.

De la même manière, on écrit l'incertitude sur  $C_f$  :

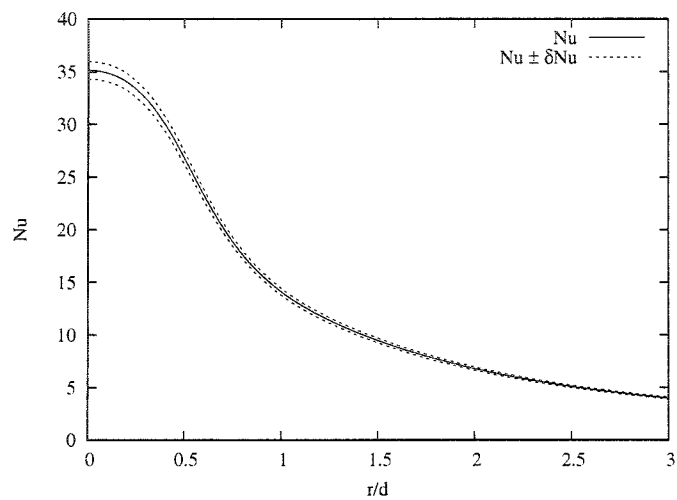
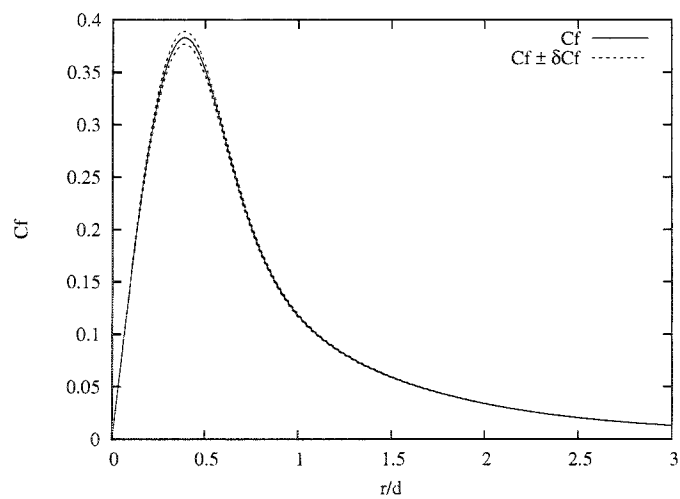
$$\delta C_f = \sqrt{\left(\frac{\partial C_f}{\partial A_{cp}} \delta A_{cp}\right)^2 + \left(\frac{\partial C_f}{\partial A_\mu} \delta A_\mu\right)^2 + \left(\frac{\partial C_f}{\partial A_\lambda} \delta A_\lambda\right)^2} \quad (6.10)$$

La forme employée pour décrire l'incertitude trouve ses origines dans l'approche statistique telle que présentée par Putko *et al.* [23].

Les résultats sont visibles sur les figures 6.57 et 6.58 pour le nombre de Nusselt et le coefficient de friction de l'air, et sur les figures 6.59 et 6.60 pour le  $\text{CO}_2$ .

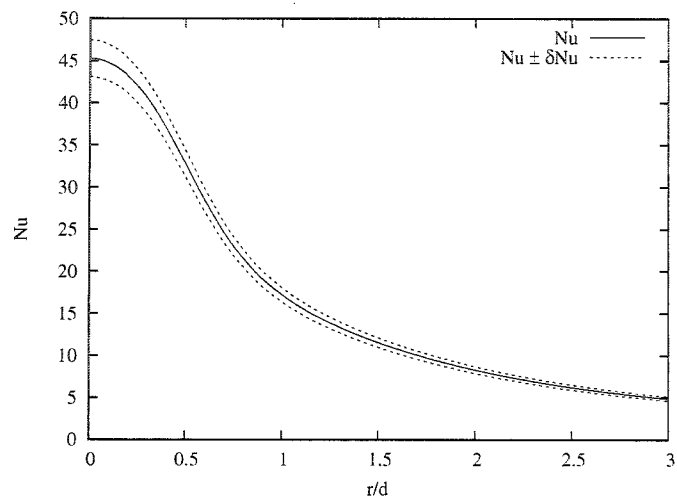
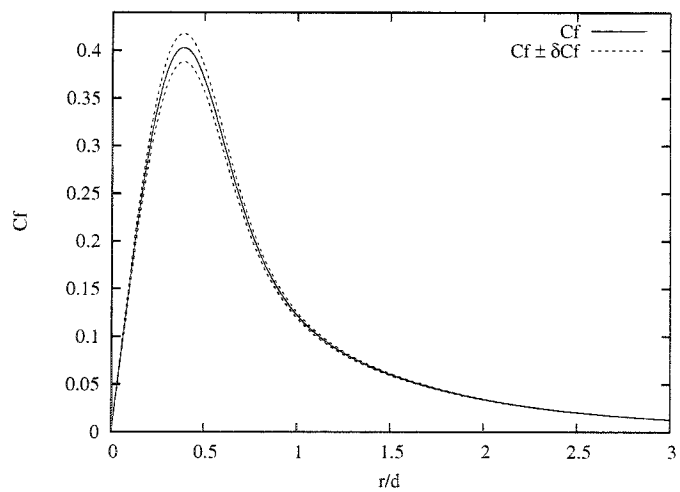
Les courbes d'incertitude (en tireté) enveloppant la courbe d'origine sont bien évidemment plus proches que lorsque nous considérons une incertitude plus importante sur les inputs. On peut également penser, aux vues de l'influence individuelle de chaque paramètre, que c'est l'incertitude sur  $A_\lambda$  qui prédomine sur  $Nu$ , et celle de  $A_\mu$  sur  $C_f$ . En effet, puisque l'influence des autres paramètres était déjà faible à 20%, elle l'est encore plus ici à 10%.



FIG. 6.57 Incertitude sur  $Nu$ FIG. 6.58 Incertitude sur  $C_f$ 

## 6.9 Calculs de solutions voisines

Dans cette section, nous regardons les solutions voisines obtenues à l'aide des sensibilités et du développement en série de Taylor. Nous prendrons tout d'abord comme

FIG. 6.59 Incertitude sur  $Nu$  ( $\text{CO}_2$ )FIG. 6.60 Incertitude sur  $C_f$  ( $\text{CO}_2$ )

paramètre les coefficients  $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$  simultanément, puis ensuite le nombre de Mach de référence  $M_r$ . Nous nous limiterons ici au jet d'air froid impactant sur le

mur chaud.

### 6.9.1 Paramètres $A_{c_p}$ , $A_\mu$ et $A_\lambda$

Nous partons de la solution d'origine où il est question du jet d'air froid impactant sur un mur chaud. Le nombre de Mach de référence est 0.4. Nous visons la solution voisine où les coefficients  $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$  ont une valeur supérieure de 10% à leur valeur d'origine. On cherche donc à approcher la solution où  $M_r = 0.4$ ,  $A_{c_p} = 0.055$ ,  $A_\mu = 0.748$  et  $A_\lambda = 0.836$ . Le développement en série de Taylor pour les trois paramètres est le suivant :

$$\begin{aligned} Nu(A_{c_p} + \delta A_{c_p}, A_\mu + \delta A_\mu, A_\lambda + \delta A_\lambda) &= Nu(A_{c_p}, A_\mu, A_\lambda) \\ &+ \frac{\partial Nu}{\partial A_{c_p}} \delta A_{c_p} + \frac{\partial Nu}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial Nu}{\partial A_\lambda} \delta A_\lambda \end{aligned}$$

pour le nombre de Nusselt, et

$$\begin{aligned} C_f(A_{c_p} + \delta A_{c_p}, A_\mu + \delta A_\mu, A_\lambda + \delta A_\lambda) &= C_f(A_{c_p}, A_\mu, A_\lambda) \\ &+ \frac{\partial C_f}{\partial A_{c_p}} \delta A_{c_p} + \frac{\partial C_f}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial C_f}{\partial A_\lambda} \delta A_\lambda \end{aligned}$$

pour le coefficient de friction.

Les résultats sont visibles sur les figures 6.61 et 6.62. La courbe extrapolée (en tireté) est confondue avec la courbe recalculée (trait plein) malgré la grande valeur des variations (10%). Ceci laisse donc penser une dépendance linéaire de  $Nu$  et de  $C_f$  par rapport aux paramètres  $A_{c_p}$ ,  $A_\mu$  et  $A_\lambda$ , au moins dans la plage de variation considérée. Notons enfin qu'une hausse simultanée de ces paramètres augmentent le nombre de Nusselt au point de stagnation ainsi que le maximum du coefficient de friction.

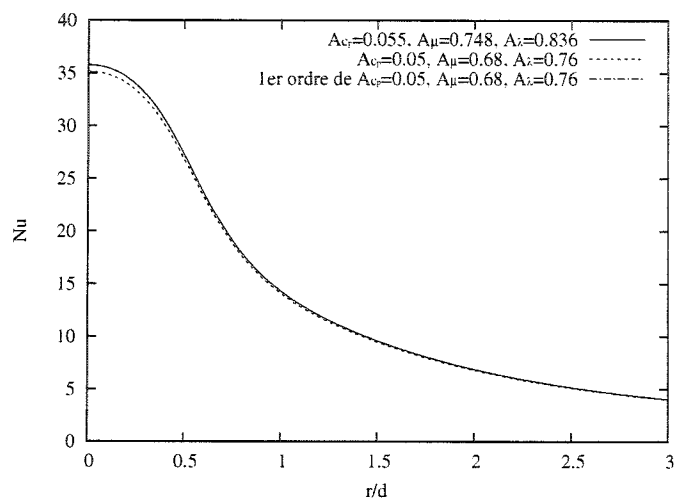


FIG. 6.61  $Nu$  extrapolé à  $(A_{c_p} = 0.055, A_{\mu} = 0.748, A_{\lambda} = 0.836)$  à partir de  $(A_{c_p} = 0.05, A_{\mu} = 0.68, A_{\lambda} = 0.76)$

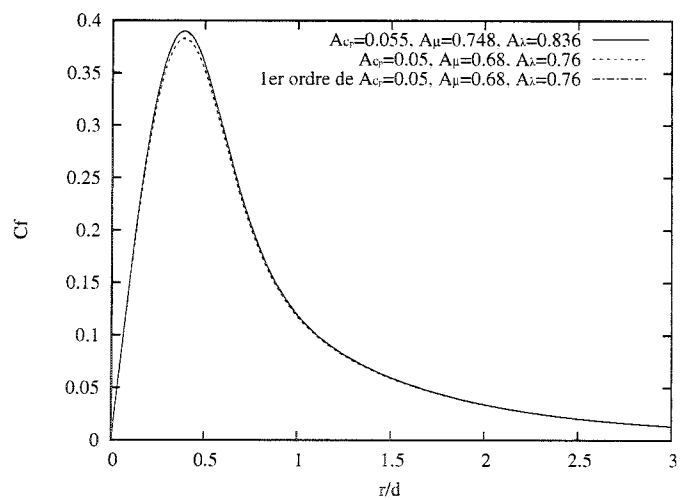


FIG. 6.62  $C_f$  extrapolé à  $(A_{c_p} = 0.055, A_{\mu} = 0.748, A_{\lambda} = 0.836)$  à partir de  $(A_{c_p} = 0.05, A_{\mu} = 0.68, A_{\lambda} = 0.76)$

### 6.9.2 Paramètre $M_r$

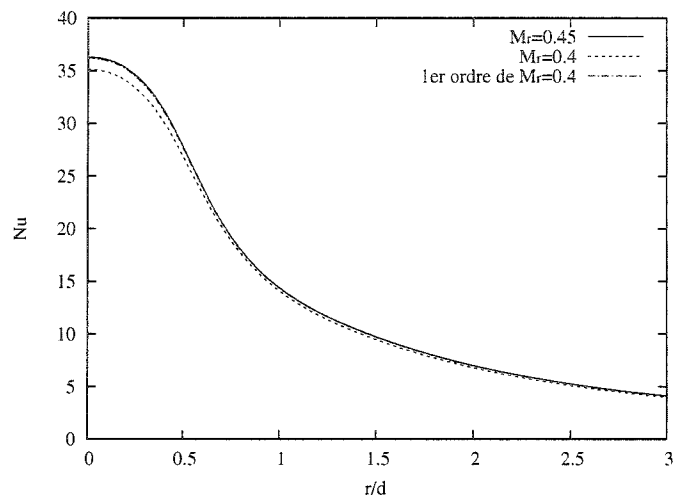
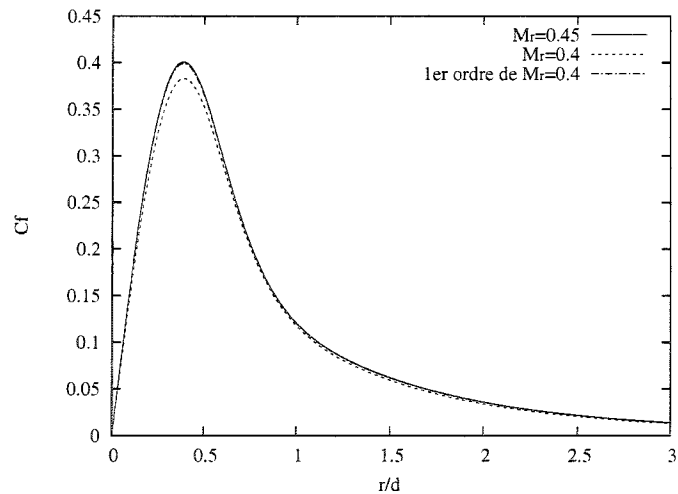
Dans cette sous-section, nous allons nous intéresser à un paramètre que nous avons laissé de côté jusqu'à présent, à savoir le nombre de Mach de référence  $M_r$ . Nous allons ainsi étudier quelques solutions voisines, et en faire ressortir une des limitations actuelles du code de calcul.

Nous allons commencer par vérifier l'approximation linéaire pour de faibles valeurs du nombre de Mach, puis ensuite nous essaierons de pousser le code en s'éloignant du régime subsonique et en se rapprochant du régime transsonique.

Nous partons donc tout d'abord de notre solution de base à  $M_r = 0.4$ . Les figures 6.63, 6.64 et 6.65 montrent les distributions radiales du nombre de Nusselt le long du mur, du coefficient de friction, de même que la distribution du nombre de Mach le long de l'axe. On utilise le développement de Taylor afin d'approcher la solution numérique à  $M_r = 0.45$ . Chaque figure est composée de la solution de base à  $M_r = 0.4$  (trait pointillé), de la solution numérique visée à  $M_r = 0.45$  (ligne pleine) et de l'extrapolation linéaire à partir de  $M_r = 0.4$  (trait tireté).

On peut voir que le nombre de Mach  $M$  est de l'ordre de 0.8 lorsque le nombre de Mach de référence est de 0.4.  $M_r$  est une valeur de référence établie à partir des conditions de référence (c'est-à-dire les conditions d'entrée).  $M_r$  est donc calculé à l'aide de  $U_r$  et  $T_r$ . La vitesse a un profil parabolique en entrée et  $U_r$  correspond à la valeur moyenne. Ainsi en entrée, le nombre de Mach local  $M$  varie de 0 (sur la paroi intérieure du tube) à 0.8 (sur l'axe). Comme le fluide est accéléré en s'écoulant vers l'aval,  $M$  est légèrement au-dessus de 0.8 au niveau des lèvres du tube.

L'approximation linéaire sur le nombre de Nusselt visible sur la figure 6.63 est très précise et l'écart entre la série de Taylor et le calcul à  $M_r = 0.45$  est minime. Il y a une différence de moins de 0.3% entre les deux courbes sur la valeur du nombre de

FIG. 6.63  $Nu$  extrapolé à  $M_r = 0.45$  à partir de  $M_r = 0.4$ FIG. 6.64  $C_f$  extrapolé à  $M_r = 0.45$  à partir de  $M_r = 0.4$ 

Nusselt au point de stagnation. On peut voir ici qu'une augmentation du nombre de Mach de référence provoquera une hausse de  $Nu$ .

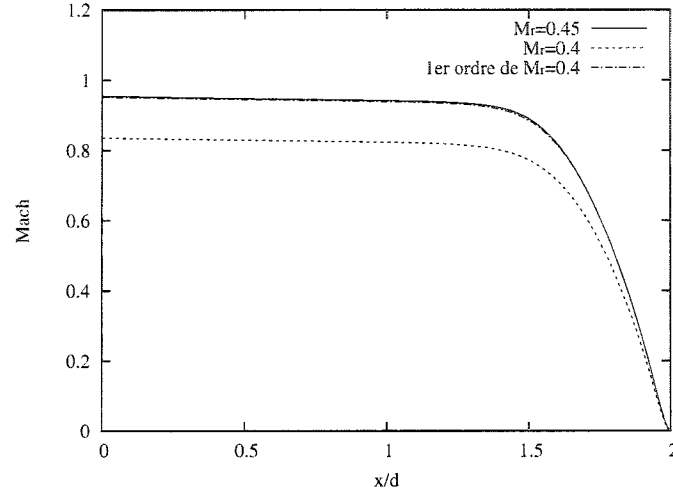


FIG. 6.65 Distribution de Mach extrapolée à  $M_r = 0.45$  à partir de  $M_r = 0.4$

L'extrapolation de  $C_f$  de la figure 6.64 est elle-aussi très proche de la solution recalculée. Les deux courbes se superposent de manière quasi-parfaite. Une augmentation de  $M_r$  induit une hausse du maximum du coefficient de friction.

La figure 6.65 présente le nombre de Mach  $M$  le long de l'axe, depuis la sortie du tube jusqu'au mur. Les résultats sont très satisfaisants (moins de 0.3% d'écart entre la courbe extrapolée de  $M_r = 0.4$  et celle recalculée à  $M_r = 0.45$  sur la valeur en  $x = 0$ ).

Comme précisé plus tôt, nous allons maintenant augmenter le nombre de Mach de référence afin de s'éloigner progressivement du régime subsonique. Nous partons donc d'une solution où  $M_r = 0.5$ , et nous visons la solution voisine à  $M_r = 0.55$ .

La figure 6.66 montre l'extrapolation effectuée sur  $Nu$ . Les observations sont identiques au cas précédents. L'approximation linéaire est précise et seulement 0.01% d'écart sont visibles entre les courbes.

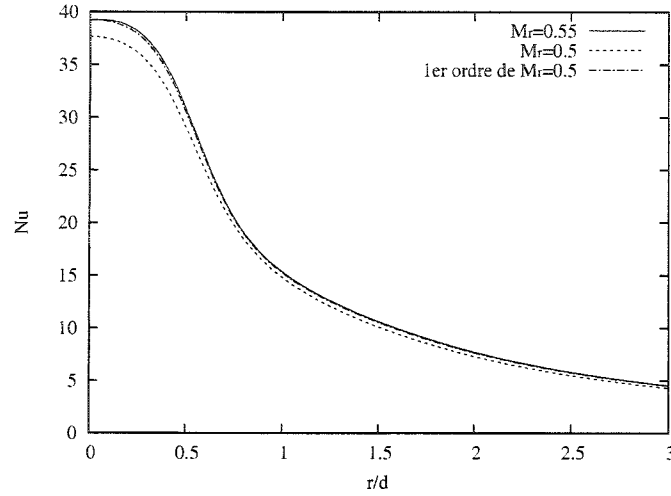


FIG. 6.66  $Nu$  extrapolé à  $M_r = 0.55$  à partir de  $M_r = 0.5$

Le coefficient de friction est indiqué sur la figure 6.67. On y voit la solution numérique à  $M_r = 0.55$  ainsi que la solution extrapolée de  $M_r = 0.5$ . Les résultats sont là aussi très satisfaisants, et le comportement ne semble pas différer de celui observé pour un nombre de Mach de référence plus faible.

De grandes différences par rapport au cas précédent apparaissent sur la figure 6.68, où est tracé le nombre de Mach  $M$  sur l'axe. En effet, on commence à observer un choc (une discontinuité) à  $M_r = 0.55$ . Comme on l'a précisé au début de cette section, bien que  $M_r = 0.55$  semble être une valeur éloignée de 1, le nombre de Mach local sur l'axe est de l'ordre de 1.2, ce qui explique la présence du choc. La solution à  $M_r = 0.5$  est lisse et il semble donc normal que les sensibilités (phénomène linéaire issu d'une solution continue) n'arrivent pas à capter cette discontinuité.

On peut regarder les résultats en retournant le problème : nous partons des calculs obtenus pour  $M_r = 0.55$  (cas avec choc) et nous visons à approcher la solution



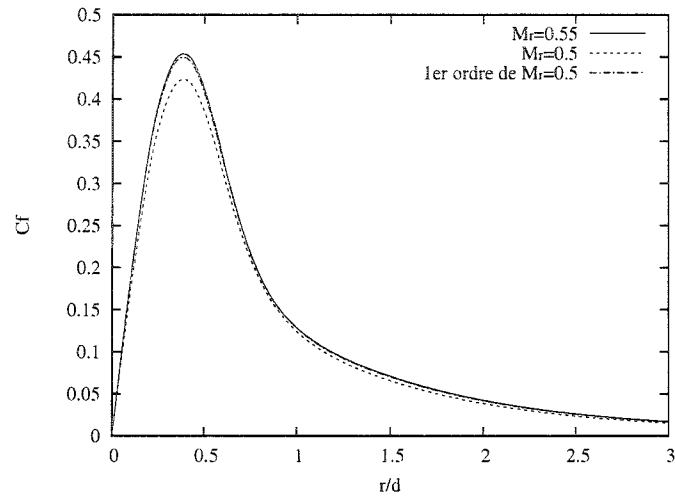


FIG. 6.67  $C_f$  extrapolé à  $M_r = 0.55$  à partir de  $M_r = 0.5$

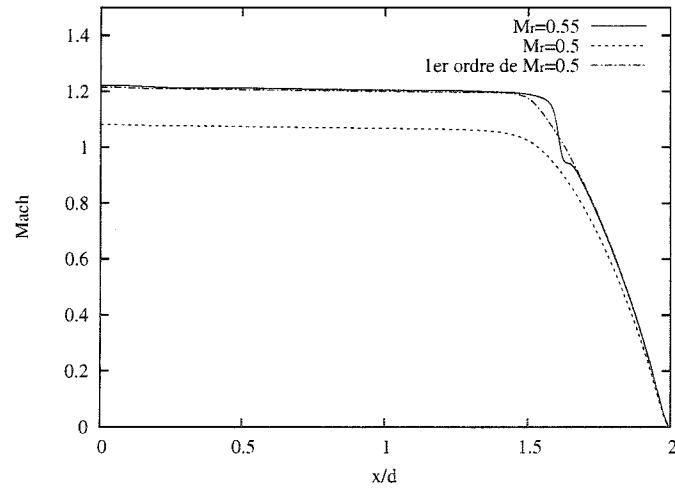


FIG. 6.68 Distribution de Mach extrapolée à  $M_r = 0.55$  à partir de  $M_r = 0.5$

voisine à  $M_r = 0.5$  (cas sans choc). On voit sur la figure 6.69 que la courbe extrapolée présente deux pics au niveau du choc. Ces deux pics correspondent aux

fontions  $\delta$ , apparaissant dans la différentiation d'un phénomène discontinu [7]. Rien n'a encore été implémenté dans le code de calcul pour capturer les discontinuités provenant de phénomènes tels les chocs.

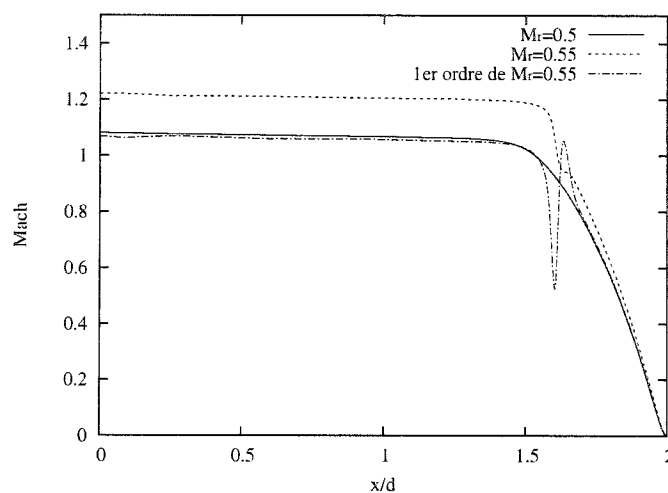


FIG. 6.69 Distribution de Mach extrapolée à  $M_r = 0.5$  à partir de  $M_r = 0.55$

Sur la figure 6.70, nous essayons d'élever encore un peu le nombre de Mach  $M_r$ , afin de passer d'une solution avec choc ( $M_r = 0.55$ ) à une autre solution avec choc ( $M_r = 0.57$ ). Les pics au niveau du choc sont encore visibles, mais on peut néanmoins remarquer la grande robustesse du code quant aux résultats obtenus sans aucune méthode de capture de choc.

Afin de terminer cette partie, nous allons essayer de situer plus précisément l'apparition du choc. Après quelques calculs, nous observons que celui-ci apparaît autour de  $M_r = 0.52$ . Nous allons donc essayer d'approcher la solution à  $M_r = 0.53$  à partir de celle à  $M_r = 0.51$  qui ne présente pas de choc. La figure 6.71 présente les résultats obtenus. La zone du choc est plus visible sur l'aggrandissement de la figure 6.72. On peut voir que la solution extrapolée à partir de  $M_r = 0.51$  ne

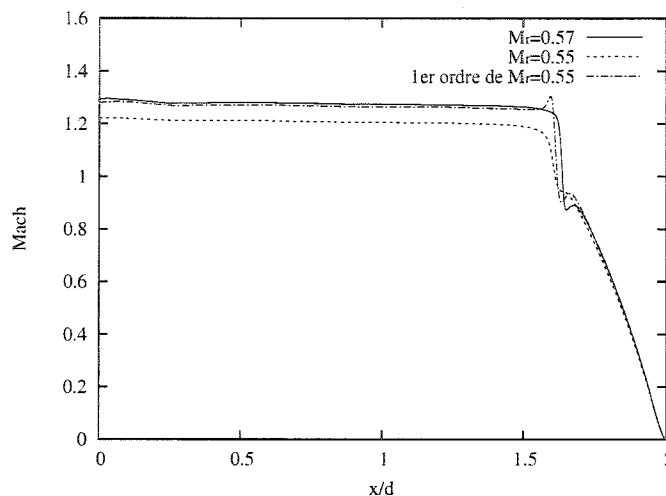


FIG. 6.70 Distribution de Mach extrapolée à  $M_r = 0.57$  à partir de  $M_r = 0.55$

semble pas capturer le début de discontinuité. Cependant, on peut s'intéresser à la forme des sensibilités du nombre de Mach sur la figure 6.73. L'allure des sensibilités semble indiquer que la solution prévoit l'apparition du choc. On ne retrouve pas ce comportement sur la figure 6.72 car ces variations sont faibles devant la solution. Il faut néanmoins émettre quelques réserves. Même si, à partir d'une solution qui semble lisse ( $M_r = 0.51$ ), les sensibilités prévoient le choc prochain (figure 6.73), il ne faut pas oublier qu'elles sont un prolongement de la solution de base. Il pourrait donc très bien y avoir une très légère inflexion pour la solution à  $M_r = 0.51$  que l'on n'aperçoit pas à l'échelle utilisée, mais qui est amplifiée pour les sensibilités (figure 6.73).

Ces observations sont néanmoins encourageantes et il pourrait être intéressant d'approfondir cette étude pour la suite du développement du code de calcul et de ses possibilités.

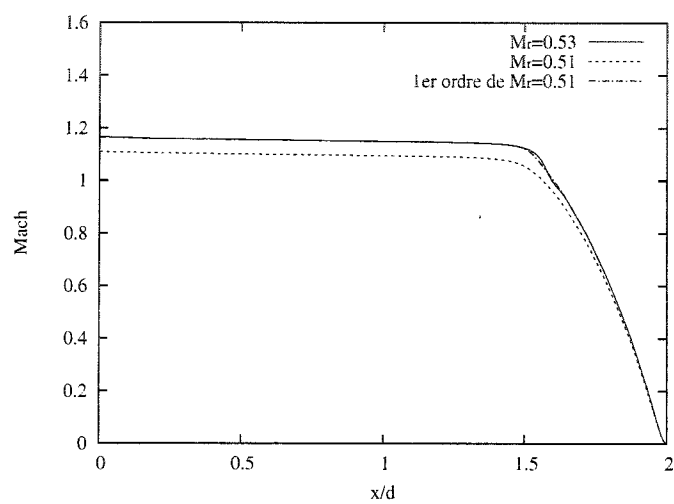


FIG. 6.71 Distribution de Mach extrapolée à  $M_r = 0.53$  à partir de  $M_r = 0.51$

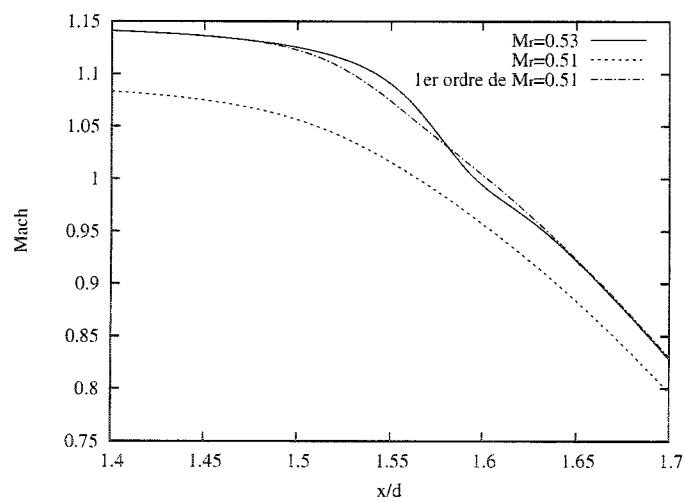


FIG. 6.72 Distribution de Mach extrapolé à  $M_r = 0.53$  à partir de  $M_r = 0.51$  (agrandissement)

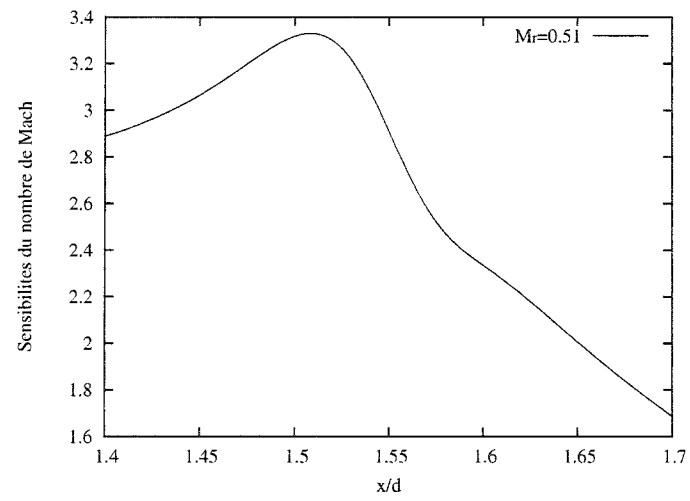


FIG. 6.73 Distribution des sensibilités du nombre de Mach à  $M_r = 0.51$  (agrandissement)

## CONCLUSION

Le but de ce mémoire était d'étendre le domaine d'application du code de calcul aux sensibilités pour des régimes compressibles subsoniques. Pour cela, nous avons tout d'abord développé les équations des régimes compressibles et proposé une formulation permettant de lancer de manière simple des calculs compressibles ou incompressibles, sous forme dimensionnelle ou adimensionnelle. Nous avons ensuite présenté les sensibilités, décrit la méthode de l'équation des sensibilités (MES) et indiqué quelles en pouvaient être les applications. La MES est obtenue en différentiant les équations continues de Navier-Stokes. Son domaine d'application est très vaste : design optimal, calcul rapide de solutions voisines, analyse de sensibilités, identification de paramètres dominants et analyse d'incertitude en sont des exemples.

Par la suite, nous avons présenté le code de calcul et la manière dont il résolvait les équations, d'un point de vue numérique, avec la méthode des éléments finis. Nous avons également vu comment le code estimait l'erreur numérique afin d'adapter le maillage pour contrôler et réduire celle-ci d'un cycle à l'autre.

Une fois toute la théorie mise en place, il fallait encore vérifier sa bonne implémentation du code. Cela a été fait sur deux solutions analytiques en utilisant la méthode des solutions manufacturées. Nous avons utilisé deux solutions analytiques, l'une étant en coordonnées cartésiennes, l'autre en coordonnées axisymétriques. Cette vérification a permis de démontrer le bon fonctionnement du résolveur et de l'estimateur d'erreur pour l'écoulement et les sensibilités.

Par la suite nous nous sommes intéressés à des exemples concrets. Nous avons commencé par un écoulement autour d'un profil NACA0012. Nous avons d'abord

fait une étude de sensibilités pour expliquer les comportements observés en prenant pour paramètre l'angle d'incidence de l'écoulement, le nombre de Mach de référence et le nombre de Reynolds. Ensuite, nous avons mis en application un des avantages des sensibilités en effectuant des calculs pour des solutions voisines, d'abord en ne considérant qu'un seul paramètre ( $\alpha$  ou  $M_r$ ), puis en faisant varier ces deux paramètres simultanément. Nous avons pu noter la qualité et la précision des résultats obtenus.

Enfin, nous avons recommencé une étude en appliquant le code à un exemple concret de jet axisymétrique aux propriétés physiques variables. Après différents commentaires sur l'écoulement lui-même, nous avons regardé les sensibilités par rapport aux exposants présents dans l'expression des propriétés du fluide. Nous avons ainsi pu comparer leur influence à l'aide des sensibilités normalisées et en faire ressortir les paramètres dominants. Nous avons aussi effectué une analyse d'incertitude afin de voir la cascade d'incertitude répercutée de l'input à l'output. Nous avons ensuite étudié la précision obtenue lors du calcul d'une solution voisine en faisant varier les trois paramètres précédents. Finalement, nous avons regardé des solutions voisines pour des nombres de Mach de référence proches, et nous avons fini sur le cas d'un choc, où les sensibilités pourraient fournir une information importante.

Une des suites à ce projet pourrait être d'élargir le domaine d'action du code numérique à des écoulement où le nombre de Mach serait plus élevé, pour rentrer dans le régime transsonique, afin d'utiliser les sensibilités pour prévoir et étudier des phénomènes plus complexes tels les chocs.

## RÉFÉRENCES

- [1] AIHARA, T., KIM, J.K. et MARUYAMA, S., *Effects of Temperature-dependent Fluid Properties on Heat Transfer due to an Axisymmetric Impinging Gas Jet Normal to a Flat Surface*, Wärme-und Stoffübertragung, 1990, vol. 25, pages 145-153
- [2] ANDERSON, J.D.Jr, *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, McGraw Hill Series in Aeronautical and Aerospace Engineering
- [3] BORGGGAARD, J., *The Sensitivity Equation Method for Optimal Design*. Thèse de Doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1994
- [4] BORGGGAARD, J. et PELLETIER, D., *Observations in Adaptive Refinement Strategies for Optimal Design*, J. Borggaard, J. Burns, E. Cliff et S. Schreck, éditeurs, Computational Methods for Optimal Design and Control, 1998, pages 59-76, Birkhäuser
- [5] CUVELIER, C., SEGAL, A. et VAN STEENHOVEN, A.A., *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*, D. Reidel Publishing Company, 1986
- [6] GODFREY, A. G. et CLIFF, E. M., *Direct Calculation of Aerodynamic Force Derivatives : A Sensitivity-Equation Approach*, 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Janvier 1998, AIAA Paper 98-0393
- [7] GUNZBURGER, M.D. *Sensitivities, Adjointes and Flow Optimization*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, vol. 31, pages 53-78
- [8] HÉTU, J.-F. et PELLETIER, D., *Adaptive Remeshing for Viscous Incompressible Flows*, Août 1992, AIAA Journal, vol. 30, no. 8



- [9] HÉTU, J.-F. et PELLETIER, D., *A Fast Adaptive Finite Element Scheme for Viscous Incompressible Flows*, Novembre 1992, AIAA Journal, vol. 30, no. 11
- [10] HUGUES, T. J. R., FRANCA, L. P. et HULBERT, G. M., *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics : VIII. The Galerkin/Least-Squares Method for Advective-Diffusive Equations*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 1989, vol. 73, pages 173-189
- [11] ILINCA, F. et PELLETIER, D., *A Unified Approach for Adaptive Solutions of Compressible and Incompressible Flows*, 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janvier 1997, AIAA Paper 97-0330
- [12] ORGANISATION DU TRAITÉ DE L'ATLANTIQUE NORD, GROUPE CONSULTATIF POUR LA RECHERCHE ET LES RÉALISATIONS AÉROSPATIALES, *Experimental Data Base for Computer Program Assessment : Report of the Fluid Dynamics Panel Working Group 04*, Neuilly sur Seine, France, AGARD 1979
- [13] PANTON, R.L., *Incompressible Flow*, Wiley-Interscience, New-York, 1984
- [14] PELLETIER, D. et HÉTU, J.-F., *An Adaptive Finite Element Methodology for Incompressible Viscous Flows*, ASME Winter Annual Meeting, Anaheim, CA, Novembre 1992
- [15] PELLETIER, D., HÉTU, J.F. et ILINCA, F., *Adaptive Finite Element Method for Thermal Flow Problems*, AIAA Journal, 1994, vol. 32, no. 4
- [16] PELLETIER, D., et ILINCA, F. et HÉTU, J.F., *An Adaptive Remeshing for Convective Heat Transfert with Variable Fluid Properties*, AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfert, 1994, vol. 8, no. 4, pages 687-694
- [17] PELLETIER, D. et ILINCA, F., *Adaptive Finite Element Method for Mixed Convection*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, Octobre-Décembre 1995, vol. 9, no. 4

- [18] PELLETIER, D., IGNAT, L. et ILINCA, F., *Adaptive Finite Element Method for Conjugate Heat Transfer*, Numerical Heat Transfert, Part A, 1997, vol. 32, pages 267-287
- [19] PELLETIER, D., ILINCA, F. et TURGEON, É., *An Adaptive Finite Element Method for Forced Convection*, International Journal for Numerical Methods in fluids, 1997, vol. 25, pages 803-823
- [20] PELLETIER, D. et TURGEON, É., *Vérification et Validation de Simulations en Thermique par une Méthode d'Éléments Finis Adaptative*, IVe Colloque Inter-universitaire Franco-Québécois, Thermique des systèmes à température modérée, Montréal, Canada, 1999
- [21] PELLETIER, D. et ROACHE, P.J., *CFD Code Verification and the Method of Manufactured Solution*, Proceedings of the 10th Annual Conference of the CFD Society of Canada, Windsor, Ontario, Canada, Juin 2002
- [22] PELLETIER, D., TURGEON, É., ÉTIENNE, S., BORGGAARD, J. *Reliable Sensitivity Analysis Via an Adaptive Sensitivity Equation Method*, 3rd AIAA Theoretical Fluid Mechanics meeting, St. Louis, MO, Juin 2002, AIAA Paper 2002-2758
- [23] PUTKO, M.M., NEWMAN, P.A., TAYLOR, A.C. et GREEN, L.L., *Approach for Uncertainty Propagation and Robust Design in Cfd Using Sensitivity Derivatives*, 15th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Anaheim, CA, Juin 2001, AIAA Paper 2001-2528
- [24] REDDY, J.N., *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 1993, 2ème édition
- [25] STEINBERG, S. et ROACHE, P.J., *Symbolic Manipulation and Computational Fluid Dynamics*, Journal of Computational Physics, Janvier 1985, vol. 57(2), pages 251-284

- [26] STEWART, D. L., *Numerical Methods for Accurate Computation of Design Sensitivities*, Thèse de Doctorat, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1998
- [27] SZABÓ, B. et BASUŠKA, I., *Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, 1991
- [28] TURGEON, É., *Application d'une Méthode d'Éléments Finis Adaptative pour les Écoulements Axisymétriques*, Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal, Canada, 1997
- [29] TURGEON, É. et PELLETIER, D., *Computation of Jet Impingement Heat Transfer by an Adaptive Finite Element Algorithm*, 7th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfert Conference, Juin 1998, Québec, Canada, pages XII.1-XII.6
- [30] TURGEON, É., PELLETIER, D. et ILINCA, F., *Compressible Heat Transfert Computations by an Adaptive Finite Element Method*, 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, Janvier 1999, AIAA Paper 99-0875
- [31] TURGEON, É. et PELLETIER, D., *Verification and Validation in CFD Using an Adaptive Finite Element Method*, Proceedings of the 46th CASI Annual Conference, Montréal, Canada, 1999
- [32] TURGEON, É., *Méthode d'Éléments Finis Adaptative pour la Résolution des Sensibilités d'Écoulements*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, Montréal, QC, 2001.
- [33] USUI, M., SIMPSON, A., SMITH, S. et JACOB, J., *Development and Flight Testing of a UAV with Inflatable-Rigidizable Wings*, 2004, AIAA Paper 2004-1373
- [34] VIOLLET, P.-L., *Mécanique des Fluides à Masse Volumique Variable*, Presses de l'école nationale des Ponts et chaussées, 1997

- [35] ZIENKIEWICZ, O.C. et ZHU, J.Z., *The Superconvergent Patch Recovery and a posteriori Error Estimates. Part I : The recovery Technique*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, vol. 33, pages 1331-1364

## ANNEXE I

## MÉTHODE DE STABILISATION

Les coefficients utilisés dans notre méthode de stabilisation sont :

$$\alpha_u = \frac{\delta_u h}{2U} \quad \alpha_p = \frac{h}{2U} \quad \alpha_T = \frac{\delta_T h}{2V}$$

où :

$$\delta_u = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \quad \delta_T = \coth(Pe_T) - \frac{1}{Pe_T}$$

avec :

$$Pe = \frac{\rho h U}{2\mu} \quad Pe_T = \frac{\rho c_p h U}{2\lambda}$$

## I.1 Équation de continuité

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta p \, d\Omega + \int_{\Omega} (\alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p) \delta p \, d\Omega - \int_{\Omega} (\beta \mathbf{u} \cdot \nabla T) \delta p \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \alpha_u \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \left[ 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] - \mathbf{f} \right\} \cdot \nabla(\delta p) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \alpha_p (\nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p - \beta \mathbf{u} \cdot \nabla T) \alpha \mathbf{u} \cdot \nabla(\delta p) \, d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \alpha_T [\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \nabla \cdot (\lambda \nabla T)] r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla(\delta p) \, d\Omega \\
& = 0
\end{aligned} \tag{I.1}$$

## I.2 Équation de mouvement

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot (\delta \mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Omega} \left[ 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] : \dot{\gamma}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \left[ 2\mu \dot{\gamma}(\mathbf{u}) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] - \mathbf{f} \right\} \cdot \{ \alpha_u [\mathbf{u} \cdot \nabla(\delta \mathbf{u})] \} \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p - \beta \mathbf{u} \cdot \nabla T) \cdot [\alpha_p \nabla \cdot (\delta \mathbf{u})] \, d\Omega \\
& = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega
\end{aligned} \tag{I.2}$$

## I.3 Équation d'énergie

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T) \delta T \, d\Omega - \int_{\Omega} (r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p) \delta T \, d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla (\delta T) \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega} [\rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - q] \alpha_T \mathbf{u} \cdot \nabla (\delta T) \, d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \alpha_p (\nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} \cdot \nabla p - \beta \mathbf{u} \cdot \nabla T) \beta \mathbf{u} \cdot \nabla (\delta T) \, d\Omega \\
& = \int_{\partial\Omega} (\lambda \nabla T \cdot \hat{\mathbf{n}}) \delta T \, d\partial\Omega + \int_{\Omega} q \delta T \, d\Omega
\end{aligned} \tag{I.3}$$

## ANNEXE II

### TERMES SOURCES POUR LES SOLUTIONS MANUFACTURÉES

Nous partons des équations de mouvement et d'énergie pour l'écoulement :

$$\mathbf{f} = \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \quad (\text{II.1})$$

$$q = \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - r_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \quad (\text{II.2})$$

et pour les sensibilités :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_f = & \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \rho (\mathbf{s}_u \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s}_u) + \nabla s_p \\ & - \nabla \cdot \left[ \mu' (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \mu (\nabla \mathbf{s}_u + \nabla \mathbf{s}_u^T) - \frac{2}{3} \mu' \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mu \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{s}_u \right] \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned} s_q = & (\rho' c_p + \rho c_p') \mathbf{u} \cdot \nabla T + \rho c_p (\mathbf{s}_u \cdot \nabla T + \mathbf{u} \cdot \nabla s_T) \\ & - r'_{cw} \mathbf{u} \cdot \nabla p - r_{cw} (\mathbf{s}_u \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \nabla s_p) - \nabla \cdot (\lambda' \nabla T + \lambda \nabla s_T) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Nous allons voir l'expression des termes en coordonnées cartésiennes et axisymétriques.



## II.1 Coordonnées cartésiennes

### II.1.1 Équation de mouvement pour l'écoulement

$$\begin{aligned}
 f_u = & \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
 & - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

$$\begin{aligned}
 f_v = & \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 & - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

### II.1.2 Équation d'énergie pour l'écoulement

$$\begin{aligned}
 q = & \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - r_{cw} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) \\
 & - \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

### II.1.3 Équation de mouvement pour les sensibilités

$$\begin{aligned}
s_{f_u} = & \rho' \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho \left( s_u \frac{\partial u}{\partial x} + s_v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial s_u}{\partial x} + v \frac{\partial s_u}{\partial y} \right) + \frac{\partial s_p}{\partial x} \\
& - \mu' \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 s_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_u}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 s_v}{\partial x \partial y} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial s_u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial s_v}{\partial y} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( \frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \tag{II.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{f_v} = & \rho' \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho \left( s_u \frac{\partial v}{\partial x} + s_v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial s_v}{\partial x} + v \frac{\partial s_v}{\partial y} \right) + \frac{\partial s_p}{\partial y} \\
& - \mu' \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \mu \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 s_u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 s_v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 s_v}{\partial y^2} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial s_u}{\partial y} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial y} \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial y} \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial s_u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial s_v}{\partial y} \right) \tag{II.9}
\end{aligned}$$

### II.1.4 Équation d'énergie pour les sensibilités

$$\begin{aligned}
s_q = & (\rho' c_p + \rho c'_p) \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho c_p \left( s_u \frac{\partial T}{\partial x} + s_v \frac{\partial T}{\partial y} + u \frac{\partial s_T}{\partial x} + v \frac{\partial s_T}{\partial y} \right) \\
& - r'_{cw} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - r_{cw} \left( s_u \frac{\partial p}{\partial x} + s_v \frac{\partial p}{\partial y} + u \frac{\partial s_p}{\partial x} + v \frac{\partial s_p}{\partial y} \right) \\
& - \lambda' \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial \lambda'}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda'}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
& - \lambda \left( \frac{\partial^2 s_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_T}{\partial y^2} \right) - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial s_T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial s_T}{\partial y} \right) \tag{II.10}
\end{aligned}$$

## II.2 Coordonnées axisymétriques

### II.2.1 Équation de mouvement pour l'écoulement

$$\begin{aligned}
 f_u = & \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \\
 & - \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3r} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 & - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) \\
 & - \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

$$\begin{aligned}
 f_v = & \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} \\
 & - \mu \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{4}{3r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{v}{r^2} \right) \\
 & - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 & - \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{II.12}$$

### II.2.2 Équation d'énergie pour l'écoulement

$$\begin{aligned}
 q = & \rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) - r_{cw} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} \right) \\
 & - \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \\
 & - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{II.13}$$

## II.2.3 Équation de mouvement pour les sensibilités

$$\begin{aligned}
s_{f_u} = & \rho' \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho \left( s_u \frac{\partial u}{\partial x} + s_v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial s_u}{\partial x} + v \frac{\partial s_u}{\partial r} \right) + \frac{\partial s_p}{\partial x} \\
& - \mu' \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3r} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
& - \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial^2 s_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_u}{\partial r^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 s_v}{\partial x \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_u}{\partial r} + \frac{1}{3r} \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{4}{3} \frac{\partial s_u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial s_v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{s_v}{r} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( \frac{\partial s_u}{\partial r} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \tag{II.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{f_v} = & \rho' \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho \left( s_u \frac{\partial v}{\partial x} + s_v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial s_v}{\partial x} + v \frac{\partial s_v}{\partial r} \right) + \frac{\partial s_p}{\partial r} \\
& - \mu' \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{4}{3r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{v}{r^2} \right) \\
& - \mu \left( \frac{1}{3} \frac{\partial^2 s_u}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^2 s_v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 s_v}{\partial r^2} + \frac{4}{3r} \frac{\partial s_v}{\partial r} - \frac{4}{3} \frac{s_v}{r^2} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial x} \left( \frac{\partial s_u}{\partial r} + \frac{\partial s_v}{\partial x} \right) \\
& - \frac{\partial \mu'}{\partial r} \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{v}{r} \right) - \frac{\partial \mu}{\partial r} \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial s_u}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial s_v}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{s_v}{r} \right) \tag{II.15}
\end{aligned}$$

### II.2.4 Équation d'énergie pour les sensibilités

$$\begin{aligned}
s_q = & (\rho' c_p + \rho c'_p) \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho c_p \left( s_u \frac{\partial T}{\partial x} + s_v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial s_T}{\partial x} + v \frac{\partial s_T}{\partial r} \right) \\
& - r'_{cw} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial r} \right) - r_{cw} \left( s_u \frac{\partial p}{\partial x} + s_v \frac{\partial p}{\partial r} + u \frac{\partial s_p}{\partial x} + v \frac{\partial s_p}{\partial r} \right) \\
& - \lambda' \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \left( \frac{\partial \lambda'}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda'}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\
& - \lambda \left( \frac{\partial^2 s_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s_T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_T}{\partial r} \right) - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial s_T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial s_T}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{II.16}$$